

МИНИМАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТА

Бохонский А.И.¹, Варминская Н.И.²

¹*Севастопольский государственный университет;*

²*Черноморское высшее военно-морское училище имени П.С. Нахимова,
г.Севастополь*

Ключевые слова: переносное и относительное движения, оптимальное управление (ускорение), энергоёмкость управления, упругая система, достижение абсолютного покоя.

Аннотация. Показано, что для заданного расстояния и времени при использовании управления в виде «разгон-торможение» возможно снижение энергии для достижения цели движения, по сравнению с управлением, найденным вариационным методом теории оптимального управления. Реверсионно сконструированные оптимальные управления применимы и для переносного движения упругих объектов. Если частоты собственных колебаний упругой системы отличаются в целое число раз, то это позволяет по всем модам колебаний достичь абсолютного покоя в конечном состоянии.

OPTIMAL CONTROL MINIMUM ENERGY TO ACHIEVE THE OBJECT MOTION PURPOSE

Bokhonsky A.I.¹, Varminskaya N.I.²

¹*Sevastopol State University;*

²*Black Sea Higher Naval School named after P.S. Nakhimov, Sevastopol*

Keywords: translational and relative motion, optimal control (acceleration), control energy intensity, elastic system, absolute quiescence.

Abstract. It is shown that for the adjusted distance and time and using control in the form of "acceleration-deceleration", it is possible to reduce the energy to achieve the motion purpose in comparison with the control found by the variational calculus method of the optimal control theory. Reversibly constructed optimal controls are applicable to the translational motion of elastic objects. If the frequencies of the elastic system natural oscillations differ by an integer number, then this allows to reach the absolute quiescence position in the final state for all oscillation modes.

В работах [1-6] приведены результаты исследований переносного поступательного и вращательного движений упругих систем, но без оценки затрат энергии на реализацию таких движений. Однако, в случае управления типа «разгон-торможение» существует предельное минимальное значение энергии для достижения за заданное время цели движения. Необходимо дальнейшее совершенствование алгоритма конструирования управления с учетом минимальной энергоёмкости.

Цель исследования – применение в алгоритме реверсионного конструирования дополнительного условия, отражающего существование предельно возможной минимальной энергии для реализации движения.

При конструировании управления в виде полинома просматривается закономерность: с ростом степени полинома с учетом условий кривой симметрии

энергия управления стремится к некоторому пределу. Например, при использовании полинома

$$U_e(t) = \sum_{i=1}^{12} C_i \cdot t^{i-1}$$

управление принимает вид

$$U_e(t) = \frac{a(T-2t)^{11}}{T^{11}}, \quad (1)$$

где $a = \frac{26L}{T^2}$, L – перемещение; T – время движения. Для управления (1) энергия ($m = 1$ кг) равна:

$$A = 2 \int_0^{\frac{T}{2}} U_e(t) V_e(t) dt = 1,1736 \frac{L^2}{T^2}.$$

С увеличением степени полинома наблюдается стремление затраченной энергии к половине значения энергии, полученной при решении задачи управления вариационным методом с использованием квадратичного критерия

оптимальности $\int_0^T U_e^2(t) dt = \min$, для которого $U_1(t) = \frac{6L(T-2t)}{T^3}$,

$$V_1(t) = \frac{6LT(T-t)}{T^3}, \quad S_1(t) = \frac{Lt^2(3T-2t)}{T^3}.$$

Энергия управления в этом случае:

$$A = 2 \int_0^{\frac{T}{2}} U_1(t) V_1(t) dt = 2,25 \frac{L^2}{T^2}.$$

Конструирование управления показывает, что при непосредственном учете дополнительного условия в виде предельного значения энергии, равного половине энергии классического управления, удастся максимально приблизиться к такому предельному значению энергии и при снижении степени полинома.

Пример. Задан полином ускорения

$$U_e(t) = \sum_{i=1}^6 C_i t^{i-1}$$

с условиями косой симметрии

$$U_e(0) = a; \quad U_e(T) = -a; \quad S_e(T) = L; \quad \int_0^{\frac{T}{2}} U_e(t) dt + \int_{\frac{T}{2}}^T U_e(t) dt = 0;$$

$$\text{при } t = \frac{T}{2}, \quad U_e\left(\frac{T}{2}\right) = 0; \quad \frac{dU_e}{dt}\left(\frac{T}{2}\right) = 0,$$

и дополнительное энергетическое $2 \int_0^{\frac{T}{2}} U_e(t) \cdot V_e(t) dt - 1,25 \frac{L^2}{T^2} = 0$.

После определения констант из системы нелинейных алгебраических уравнений получены выражения для ускорения (управления), скорости и перемещения объекта (в переносном движении). На рисунке 1 изображены графики $U_e(t)$, $V_e(t)$, $S_e(t)$ конструируемого управления, а на рисунке 2 графики $U_1(t)$, $V_1(t)$, $S_1(t)$ управления, полученного классическим вариационным методом.

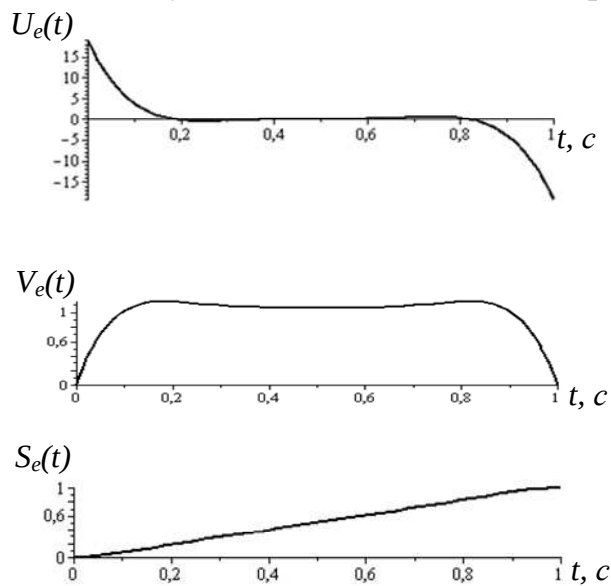


Рис. 1. Графики ускорения $U_e(t)$, скорости $V_e(t)$, перемещения $S_e(t)$ конструируемого управления

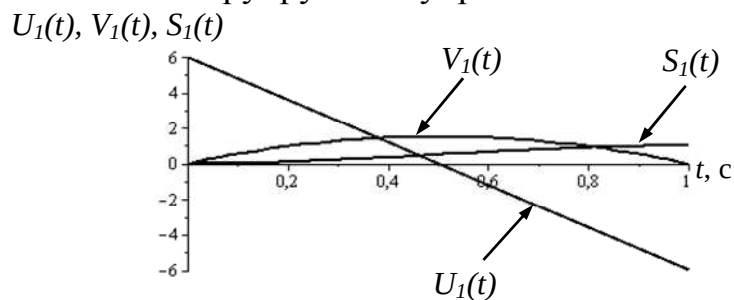


Рис. 2. Графики ускорения $U_1(t)$, скорости $V_1(t)$, перемещения $S_1(t)$ для управления, полученного вариационным методом

Относительное движение

Как было установлено, кососимметричные управления переносным движением упругих систем обеспечивают относительный либо абсолютный покой в конечном состоянии, причем время движения при известной частоте собственных колебаний системы (с одной степенью свободы) находилось из моментных соотношений в относительном движении как общих корней системы трансцендентных уравнений ($x(T)=0$, $\dot{x}(T)=0$). Графический поиск корней рассмотрен в работах [4-5].

Для системы с одной степенью свободы, относительное движение которой описывается уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = -U_e(t)$$

с нулевыми начальными условиями при $k = 2\pi \text{ с}^{-1}$ состояние абсолютного покоя достигается в момент времени $T = 1 \text{ с}$.

Графики перемещения и скорости изображены на рисунке 3. В случае классического управления переносным движением графики относительного движения изображены на рисунке 4.

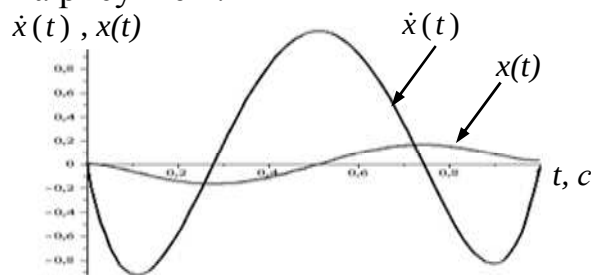


Рис. 3. Графики перемещения $x(t)$ и скорости $\dot{x}(t)$ для конструируемого управления

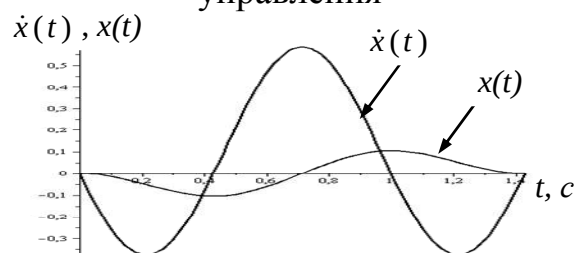


Рис. 4. Графики перемещения $x(t)$ и скорости $\dot{x}(t)$ для управления, полученного вариационным методом

В случае системы с конечным числом степеней свободы абсолютный покой по всем модам колебаний (при движении из состояния покоя) достигим в системе с частотами собственных колебаний, отличающимися в целое число раз (кратными частотами). Такая система может быть заранее запроектирована.

Если, например, массы и частоты собственных колебаний заданы, то могут быть найдены коэффициенты жесткости упругих связей. Алгоритм проектирования иллюстрируется на простом примере системы с двумя степенями свободы. Уравнения относительного движения системы, изображенной на рисунке 5:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (C_1 + C_2)x_1 - C_2 x_2 = -m_1 U_e(t),$$

$$m_1 \ddot{x}_2 + C_2 x_2 - C_2 x_1 = -m_2 U_e(t),$$

где m_1, m_2 – сосредоточенные массы; C_1, C_2 – коэффициенты жесткости; $U_e(t)$ – переносное оптимальное ускорение (управление). У однородной системы частотный определитель

$$\begin{vmatrix} C_1 + C_2 - m_1 \omega^2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

из которого при $m_1 = m_2 = m$ следует:

$$\omega^4 - \frac{C_1 + 2C_2}{m} \omega^2 + \frac{C_1 C_2}{m^2} = 0. \quad (2)$$

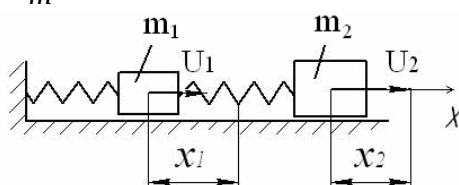


Рис. 5. Упругая система с двумя степенями свободы

Задача нелинейная, необходимо найти коэффициенты жесткости C_1 и C_2 . Из (2) при $\omega_1 = 10 \text{ с}^{-1}$; $\omega_2 = 40 \text{ с}^{-1}$, $m_1 = m_2 = m = 20 \text{ кг}$ получена система

$$\begin{cases} 5C_1 + 10C_2 - \frac{C_1 C_2}{400} - 10000 = 0, \\ 80C_1 + 160C_2 - \frac{C_1 C_2}{400} - 2560000 = 0, \end{cases}$$

корни которой: $C_1 = 4311,42 \text{ Н/м}$; $C_2 = 14844,29 \text{ Н/м}$.

В соответствии с теорией колебаний находятся коэффициенты мод

$$\nu_{11} = 1, \nu_{12} = 1; \quad \nu_{21} = \frac{C_1 + C_2 - \omega_1^2}{C_2} = 1,2837; \quad \nu_{22} = \frac{C_1 + C_2 - \omega_2^2}{C_2} = 1,1826.$$

С учетом $U_e = A \sin pt$, где $A = \frac{L p^2}{2\pi}$, общее решение принимает вид:

$$x_1(t) = B_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + B_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) + A_1 \sin(pt),$$

$$x_2(t) = B_1 \nu_{21} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + B_2 \nu_{22} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) + A_2 \sin(pt),$$

$$\text{где } A_1 = -\frac{mA(2C_2 - mp^2)}{m^2 p^4 - 2mp^2 C_2 - C_1 mp^2 + C_1 C_2}; \quad A_2 = -\frac{mA(2C_2 + C_1 - mp^2)}{m^2 p^4 - 2mp^2 C_2 - C_1 mp^2 + C_1 C_2}.$$

При переносном движении из состояния покоя константы $B_1, B_2, \alpha_1, \alpha_2$ найдены с использованием начальных условий $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0$, преобразующихся к системе трансцендентных уравнений. В данном случае: $B_1 = -0,0085 \text{ м}$; $B_2 = 0,0083 \text{ м}$; $\alpha_1 = -6,2832$; $\alpha_2 = 6,2832$.

Моментные соотношения подтверждают существование общих корней (для времени движения), которые отличаются в целое число раз:

$$T_i = T_1 \cdot n, \quad \text{где } T_1 = 1,2566 \text{ с}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Графики $x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)$ при $L_1 = 1 \text{ м}$, $p = 5 \text{ с}^{-1}$ изображены на рисунке 6.

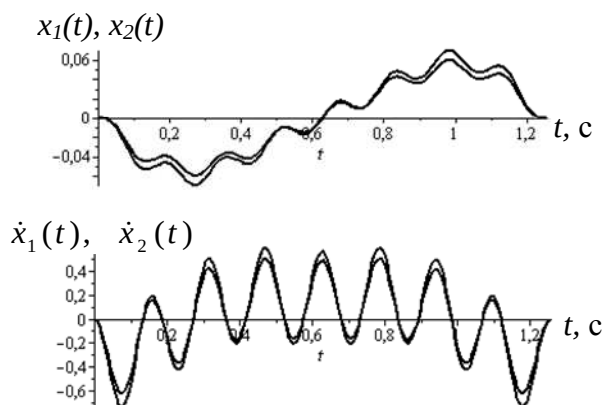


Рис. 6. Графики перемещений и скоростей

Вычислительный эксперимент подтверждает достижение относительного покоя в момент времени $T_1 = 1,2566 \text{ с}$. по двум модам колебаний.

Обоснование переносного ускорения (управления) в виде периодической функции

Принято

$$U_e(t) = a \sin pt. \quad (3)$$

Из (3) в переносном движении выражения для скорости и перемещения:

$$V_e(t) = \int U_e(t) dt + D_1, \quad S_e(t) = \int V_e(t) dt + D_2. \quad (4)$$

При определении постоянных D_1 , D_2 , a использованы условия:

$$t = 0, \quad S_e(0) = 0, \quad V_e(0) = 0, \quad t = T, \quad S_e(T) = L,$$

благодаря которым получено:

$$D_1 = \frac{Lp \cos pT}{-\sin pT + pT \cos pT}; \quad D_2 = 0; \quad a = \frac{Lp^2}{-\sin pT + pT \cos pT}.$$

С учетом перемещения системы за время воздействия $T = \frac{2\pi}{p}$ выражения

(3) и (4) принимают вид

$$U_e(t) = \frac{2\pi L}{T^2} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{Lp^2}{T} \sin(pt); \quad V_e(t) = \frac{L}{T}(1 - \cos pt), \quad S_e(t) = \frac{L}{2\pi}(pt - \sin pt).$$

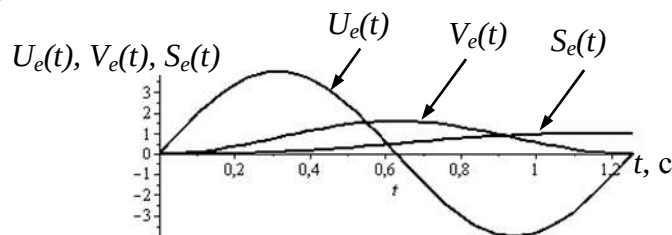


Рис. 7. Графики переносного движения

Графики переносного движения (рисунок 7) подтверждают достижение переносного покоя – при перемещении системы на расстояние L за время T . В сочетании с относительным покоем наступает в конечном состоянии абсолютный покой. Запроектированная система с заданными кратными частотами облегчает достижение с высокой точностью требуемого состояния покоя упругой системы при достижении конечного состояния.

Выводы

1. Впервые получено оптимальное управление переносным движением объекта (при заданных L и T) с предельной возможной энергоемкостью. Такое управление применимо и движению упругих объектов с целью достижения абсолютного либо относительного покоя в конечном состоянии.

2. На основании результатов теоретических исследований предполагается проектирование и программирование механических исполнительных органов для практической реализации данного типа движения: в мехатронных модулях, манипуляторах, автомобилях и других объектах современной техники.

3. Важно отметить, что управлению соответствует уравнение Эйлера и новый восстанавливаемый реверсионно функционал-критерий, который может быть непосредственно использован для обратной проверки результата вариационным методом теории оптимального управления.

Список литературы

1. Карновский И.А., Почман Ю.М. Методы оптимального управления колебаниями деформируемых систем. – Киев, Донецк: Высш. шк. 1982. – 116 с.
2. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы: динамика, уравнение, оптимизация. – М.: Наука, 1989. – 368 с.
3. Бохонский А.И., Варминская Н.И., Мозолевский М.И. Оптимальное управление переносным движением деформируемых объектов: теория и технические приложения / под ред. А.И. Бохонского. – Севастополь: изд-во СевНТУ, 2007. – 296 с.
4. Бохонский А.И., Варминская Н.И. Вариационное и реверсионное исчисление в механике. – Севастополь: СевНТУ, 2012. – 212 с.
5. Бохонский А.И. Реверсионный принцип оптимальности. – М.: Вузовский учебник: ИНФРА-М., 2016. – 174 с.
6. Бохонский А.И. Энергоемкость управления перемещением объектов // Фундаментальные основы механики. – 2017. – №2. – С. 38-41.

Сведения об авторах:

Бохонский Александр Иванович – д.т.н., профессор, профессор кафедры технической механики и машиноведения, СевГУ, г. Севастополь;

Варминская Наталья Ивановна – к.т.н., доцент, заведующая кафедрой физики и общетехнических дисциплин, ЧВВМУ имени П.С. Нахимова, г.Севастополь.