

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ НЕОДНОРОДНОГО ШАРА**Стородубцева Т.Н.***Воронежский государственный лесотехнический университет
имени Г.Ф.Морозова, г.Воронеж***Ключевые слова:** деформации, упругость, неоднородность, шар, реология.

Аннотация. В данной статье рассмотрена задача о центрально-симметричном деформировании неоднородного упруго-пластического шара. Реологические свойства материала описываются теорией малых упруго-пластических деформаций, с параметрами, зависящими от радиуса-вектора шара. Найдено точное аналитическое решение основного нелинейного дифференциального уравнения, которое представляет собой алгебраическое трансцендентное уравнение. Проведено обобщение задачи о деформировании упругого шара с произвольно изменяющимися по радиусу упругими параметрами $\sigma(r)$ и $K(r)$. Данное решение допускает обобщение на случай неоднородной линейной и нелинейной ползучести материала.

ELASTIC-PLASTIC DEFORMATIONS OF NON-UNIFORM BALL**Storodubtseva T.N.***Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F.Morozov,
Voronezh***Keywords:** deformations, elasticity, inhomogeneity, ball, rheology.

Abstract. In this article the problem of central symmetric deformation of inhomogeneous elastic-plastic ball is considered. The rheological properties of the material are described by the theory of small elastic-plastic deformations, with parameters depending on the radius - the vector of the ball. An exact analytical solution to the basic nonlinear differential equation was found, which is an algebraic transcendent equation. The task of deforming the elastic ball with the elastic parameters $\sigma(r)$ and $K(r)$ that vary arbitrarily in radius was summarized. This solution allows generalization in the case of non-uniform linear and non-linear creep of the material.

Рассмотрим задачу о деформировании упругого шара внутреннего радиуса R_1 и внешнего радиуса R_2 . Шар находится под действием равномерного внутреннего давления p и внешнего q .

Уравнение равновесия, совместности деформации и соотношения Коши имеют следующий вид:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = 0. \quad (1)$$

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \frac{(\varepsilon_\theta - \varepsilon_r)}{r} = 0. \quad (2)$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_r = \frac{u}{r}. \quad (3)$$

Уравнения (1) и (2) преобразуем к следующему виду:

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + 3\sigma_r = 2\sigma_r + \sigma_r, \quad (4)$$

$$r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + 3\varepsilon_\theta = 2\varepsilon_\theta + \varepsilon_r. \quad (5)$$

Введем в рассмотрение среднее напряжение σ_{cp} и объемную деформацию θ [1]:

$$\sigma_{cp} = \frac{2\sigma_\theta + \sigma_r}{3}; \quad \theta = 2\varepsilon_\theta + \varepsilon_r. \quad (6)$$

Теперь соотношения (4) и (5) примут вид:

$$\frac{d}{dr} \cdot (r^3 \cdot \sigma_r) = 3r^2 \cdot \sigma_{cp}. \quad (7)$$

$$\frac{d}{dr} (r^3 \cdot \varepsilon_\theta) = r^2 \cdot \theta. \quad (8)$$

Закон Гука для изотропного шара можно записать в таком виде [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_{cp} &= K \cdot \theta; \quad \int_r = 2 \cdot G \cdot \ell_r; \\ \int_\theta &= 2 \cdot G \cdot \ell_\theta. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь K – модуль объемного сжатия; G – модуль сдвига; $\int_r$ и $\int_\theta$ – соответственно девиаторы напряжений; ℓ_r и ℓ_θ – девиаторы деформаций.

$$\int_r = \sigma_r + \sigma_{cp}; \quad \int_\theta = \sigma_\theta - \sigma_{cp}; \quad (10)$$

$$\ell_r = \varepsilon_r - \frac{\theta}{3}; \quad \ell_\theta = \varepsilon_\theta - \frac{\theta}{3}. \quad (11)$$

Подставим закон Гука (10) в соотношение (8):

$$\frac{d}{dr} \cdot (r^3 \cdot \sigma_r) = 3 \cdot r^2 \cdot K \cdot \theta. \quad (12)$$

Приравняем теперь соотношения (12) и (8):

$$\frac{d}{dr} \cdot (r^3 \cdot \sigma_r) = 3K \cdot \frac{d}{dr} (r^3 \cdot \varepsilon_\theta). \quad (13)$$

Рассмотрим следующий частный случай неоднородного упругого шара:

$$K = K_0 = \text{const}; \quad G = G(r), \quad (14)$$

где $G(r)$ – произвольная функция радиуса r .

Проинтегрируем соотношение (13) по r :

$$\sigma_r = 3 \cdot K_0 \cdot \varepsilon_\theta + \frac{C_1}{r^3}. \quad (15)$$

Воспользуемся законом Гука для неоднородного изотропного шара [2]:

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{9K_0} \cdot (2\sigma_\theta + \sigma_r) + \frac{1}{6 \cdot G(r)} \cdot (\sigma_\theta - \sigma_r). \quad (16)$$

Теперь будем иметь:

$$\varepsilon_\theta = \frac{\sigma_r}{3K_0} - \frac{C_1}{3K_0 \cdot r^3} = \frac{1}{9K_0} \cdot (\sigma_\theta + \sigma_r) + \frac{1}{6 \cdot G} \cdot (\sigma_\theta - \sigma_r). \quad (17)$$

Из уравнения (1) получим:

$$\sigma_\theta = \frac{r}{2} \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r. \quad (18)$$

Подставим предыдущее соотношение в уравнение (17):

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = - \frac{C_1}{3K_0 r^4 \cdot \left[\frac{1}{9K_0} + \frac{1}{12G(r)} \right]}. \quad (19)$$

Формула (19) дает точное аналитическое решение задачи для неоднородного шара при $G=G(r)$ и $K=K_0=\text{const}$. Константы интегрирования находятся из граничных условий:

$$\begin{aligned} \sigma_r(r=R_1) &= -p; \\ \sigma_r(r=R_2) &= -q. \end{aligned} \quad (20)$$

Уравнения (1) и (2) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_{\theta} - \int_r &= \frac{r}{2} \cdot \frac{d\sigma_r}{dr}; \\ \ell_r - \ell_{\theta} &= r \cdot \frac{d\varepsilon_{\theta}}{dr} \end{aligned} \quad (21)$$

Из закона Гука (9) будем иметь:

$$\ell_r - \ell_{\theta} = \frac{1}{2G} \cdot \left(\int_r - \int_{\theta} \right). \quad (22)$$

Подставим сюда соотношения (21):

$$\begin{aligned} r \cdot \frac{d\varepsilon_{\theta}}{dr} &= - \frac{r}{4G} \cdot \frac{d\sigma_r}{dr}; \\ \frac{d\sigma_r}{dr} &= -4G \cdot \frac{d\varepsilon_{\theta}}{dr}. \end{aligned} \quad (23)$$

Рассмотрим теперь такой случай неоднородности свойств шара:

$$G=G_0=\text{const}; K=K(r), \quad (24)$$

где $K(r)$ – произвольная функция радиуса.

Проинтегрируем теперь соотношение (23):

$$\sigma_r = -4G\varepsilon_{\theta} + C_1. \quad (25)$$

Подставим в соотношение (25) закон Гука (16):

$$\frac{d\sigma_r}{dr} \frac{1}{r} \cdot \frac{\left[\frac{4}{3} \cdot \frac{G_0}{K} + 1 \right]}{\left[\frac{4}{9} \cdot \frac{G_0}{K} G - \frac{1}{12G_0} \right]} \sigma_r - \left[\frac{C_1}{\frac{4}{9} \cdot \frac{G_0}{K} - \frac{1}{12G_0}} \right] = 0. \quad (26)$$

Уравнение (26) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно радиального напряжения, которое всегда имеет общий интеграл.

Рассмотрим теперь деформацию упруго-пластического шара. Выражения для интенсивности деформаций и напряжений имеют такой вид [2]:

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 +} \\ &+ \sqrt{\frac{3}{2}} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\tau_i = \sqrt{\frac{1}{6} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2} + \sqrt{6 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}}. \quad (28)$$

В случае симметричного деформирования шара будем иметь:

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{2 \cdot (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2} = \sqrt{\frac{2}{6}} \cdot (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (\ell_r - \ell_\theta). \quad (29)$$

$$\tau_i = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{2(\sigma_r - \sigma_\theta)^2} = \sqrt{\frac{2}{6}} \cdot (\sigma_r - \sigma_\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (\int_r - \int_\theta). \quad (30)$$

Введем в рассмотрение следующую функцию:

$$p = \frac{du}{dr} - \frac{u}{r}. \quad (31)$$

В теории упруго-пластических деформаций со степенным упрочнением имеем следующее соотношения:

$$\begin{aligned} \gamma_i &= 2 \cdot \psi \cdot \tau_i; \\ \varepsilon_i &= \frac{2}{3} \cdot \psi \cdot \sigma_i; \\ \tau_i &= \bar{\beta} \cdot \gamma_i^\mu, \end{aligned} \quad (32)$$

где $\bar{\beta}$ и μ – постоянные, такие же как и при установившейся ползучести. Из предыдущих формул будем иметь:

$$\psi = \frac{\gamma_i}{2 \cdot \bar{\beta} \cdot \gamma_i^\mu} = \frac{\gamma_i^{1-\mu}}{2 \cdot \bar{\beta}}. \quad (33)$$

Для функции p будем иметь:

$$r \cdot \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = \varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \ell_r - \ell_\theta = p. \quad (34)$$

$$\psi = \frac{\gamma_i^{1-\mu}}{2 \cdot \bar{\beta}} = \frac{1}{2 \cdot \bar{\beta}} \cdot \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot p \right]^{1-\mu}. \quad (35)$$

На основании теории упруго-пластических деформаций:

$$\ell_r = \psi \cdot \int_r; \quad \ell_\theta = \psi \cdot \int_\theta. \quad (36)$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \int_\theta - \int_r = \frac{1}{\psi} \cdot [\ell_\theta - \ell_r] = 2 \cdot \bar{\beta} \cdot \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot p \right]^{\mu-1} \cdot p = 2 \cdot \bar{\beta} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{\mu-1} \cdot p^\mu. \quad (37)$$

Перепишем соотношение (15) в таком виде:

$$r \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} = 3Kr \cdot \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} - \frac{3C_1}{r^3}. \quad (38)$$

С учетом формулы (37) будем иметь:

$$r \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} = 4 \cdot \bar{\beta} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{\mu-1} \cdot p. \quad (39)$$

Подставим соотношения (34) и (39) в формулу (38):

$$4\bar{\beta} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{\mu-1} \cdot p^{\mu} = 3Kp - \frac{3C_1}{r^3}. \quad (40)$$

Рассмотрим следующий случай неоднородности свойств упруго-пластического шара:

$$K=K_0=\text{const}; \mu=\mu(r); \bar{\beta}=\bar{\beta}(r), \quad (41)$$

где $\mu(r)$ и $\bar{\beta}(r)$ – произвольные функции радиуса.

Отметим, что в теории пластичности обычно в первом приближении берется условие несжимаемости материала [2]. Поэтому учет сжимаемости шара с использованием постоянного модуля объемного сжатия K_0 (материал – малосжимаемый) является шагом в теории пластичности неоднородных тел.

Решение данной задачи для однородного упруго-пластического шара в формуле (40) дано в работе [3]. Для неоднородного упруго-пластического шара достаточно поставить в соотношение (40) $K=K_0$.

Список литературы

1. Варданян Г.С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности / Г.С. Варданян, В.И. Андреев, Н.М. Атаров, А.А. Горшков. – М., 1995. – 572 с.
2. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. – М.: МГУ, 1976. – 367 с.
3. Стородубцева Т.Н. Упруго-пластические деформации однородного шара / Т.Н. Стородубцева, В.Б. Огарков // Перспективные технологии, транспортные средства и оборудование при производстве, эксплуатации, сервисе и ремонте: межвузовский сборник научных трудов / под ред. В.И. Посметьева. – Воронеж: ВГЛТА, 2007. – Вып. 2. – С. 61-67.

Сведения об авторе:

Стородубцева Тамара Никаноровна – д.т.н., доцент, заведующий кафедрой, ВГЛТУ, г. Воронеж.