

СИСТЕМАТИЗАЦИЯ НАПРАВЛЕННЫХ ВЕЛИЧИН С ПОМОЩЬЮ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Терещенко В.Г.

Северо-Кавказский федеральный университет, г. Ставрополь

Ключевые слова: анализ размерностей, система величин, механика.

Аннотация. Для совершенствования метода анализа размерностей и классификации физических величин создаётся новая система величин. В данной работе изложены основные принципы образования размерностей тех величин, которые обладают ориентацией в пространстве. Получены размерности для составляющих изменения вектора, для угла как скалярной и как ориентированной в пространстве величины.

SYSTEMATIZATION OF DIRECTED QUANTITIES USING DIMENSIONS

Tereshchenko V.G.

North Caucasus Federal University, Stavropol

Keywords: dimensional analysis, system of quantities, mechanics.

Abstract. To improve the method of dimension analysis and classification of physical quantities, a new system of quantities is created. This paper describes the basic principles of the formation of dimensions of those quantities that have orientation in space. Dimensions are obtained for the components of the vector change, for the angle as a scalar and as a space-oriented quantity.

Для более широкого и успешного использования метода анализа размерностей требуется создание новой системы величин, которая обобщит частные приёмы улучшения системы, предложенные разными авторами для решения конкретных задач [1, 2]. Известен приём увеличения количества основных единиц измерения (что соответствует увеличению количества основных размерностей) при анализе размерностей в пространственной задаче. Он заключается в том, что размерам тела по трём взаимно перпендикулярным направлениям ставят в соответствие три различные единицы измерения (различные размерности), соответствующие высоте, длине и ширине [1]. Этот частный приём не внёс изменений в общую систему величин, потому что выбор направлений, соответствующих высоте, длине и ширине не может быть универсальным. Мы поставили перед собой задачу разработать новую систему величин, в которой, кроме прочего, будет отражена пространственная ориентация геометрических величин. Только изменением самой системы величин можно обеспечить в общем случае выполнение требования, сформулированного заслуженным деятелем науки и техники Российской Федерации Г.С. Варданяном, о взаимно однозначном соответствии между размерными величинами и их размерностями [2-4]. Такая система [5, 6] станет классифицирующей, т.е. позволит однозначно классифицировать величины с помощью их размерностей. Она обеспечит необходимое количество основных величин для решения задач методом анализа размерностей. Избавит от необходимости добавлять основные

величины в процессе решения конкретной задачи, т.к. будет универсальной. Пока разрабатывается только система величин механики.

В данной небольшой статье мы рассмотрим только те величины, которые обладают ориентацией в пространстве. Предложим принципы образования размерностей для них в разрабатываемой нами новой системе величин и приведём примеры размерностей таких величин из области геометрии и механики. Размерности векторов, в том числе единичных, рассмотрены в [6, 7]. Как известно, не только векторы обладают ориентацией в пространстве. Угол поворота имеет определённую плоскость и направление в ней, что можно представить также направлением оси поворота в пространстве. Обладая модулем и направлением, конечные повороты не относятся к векторным величинам, т.к. для них не выполняется закон сложения векторов [8]. Размерностью угла в Международной системе величин является единица, что делает угол недоступной величиной для размерностного анализа. Даже использование единиц измерения угла в выражениях для производных единиц Системы интернациональной не регламентировано стандартом. Но в новой системе величин для углов тоже должны быть составлены свои размерности, поскольку величины с размерностью «единица» в ней не предусмотрены.

Пространственно-временные величины (длина L , время T , угол D) и количество объектов или явлений N имеют в новой системе, помимо объективно выраженного, ещё и субъективно выраженный (позиционный) формат, который используется для указания положения, мгновения, направления, порядкового номера L_p , T_p , D_p , N_p . Объективные по своей сути, величины в позиционном формате выражаются субъективными числовыми значениями, зависящими от произвольного выбора начала отсчёта.

Любая основная или производная величина новой системы в объективно выраженном или позиционном формате представлена не только полной формой, но и формой конечного изменения $(...)_\Delta$, и формой бесконечно малого изменения $(...)_\delta$ [7]. Благодаря этому, размерности производных величин точнее соответствуют определениям и определяющим формулам, записанным в дифференциальной или интегральной форме. Конечное изменение позиционной величины есть объективно выраженная величина.

В новой системе введена основная величина, которая в позиционном формате D_p представляет собой направление в пространстве, а её изменение $(D_p)_\Delta$ представляет собой угол поворота направления. В отличие от остальных величин, эта – характеризуется, в общем случае (в трёхмерном пространстве), двумя числовыми значениями в любом формате. С помощью направлений образуем векторные величины. Для этого предусмотрено действие «объединения» направления, выполняемое только с длиной, и образующее геометрический вектор. Это действие не придумано, а взято из физических формул, где оно присутствует в неявной форме. В физических формулах оно записывается стрелочкой над буквенным обозначением величины. При этом действии с величинами в физических формулах не перемножаются числовые значения, не образуется новая единица измерения, а образуется геометрическая величина, объединяющая в себе направление и длину «как есть». Формы конечного и

бесконечно малого изменений применяем также и к векторным величинам, т.е. к объединениям. Обозначения в создаваемой системе величин, естественно, ещё не стандартизованы и могут претерпевать изменения. Объединение обозначаем « $\circ$ ». Для величин, заимствованных из СИ, сохраняем их стандартные обозначения. Оператор размерности $\dim$ мы записываем с нижним индексом D , чтобы отличать размерность $\dim_D$ в новой системе от размерности $\dim$ в СИ. Размерность радиус-вектора

$$\dim_D = D_P \circ L_P. \quad (1)$$

Чтобы получить размерность вектора скорости, нужно размерность изменения радиус-вектора поделить на размерность соответствующего изменения времени.

$$\dim_D \vec{v} = \dim_D \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{(D_P \circ L_P)_\partial}{T_\partial}. \quad (2)$$

Покажем связь вектора с другими ориентированными в пространстве величинами и связь между их размерностями. Рассмотрим изображённое на рисунке 1 изменение геометрического вектора или радиус-вектора. (Аналогично можно будет исследовать изменение вектора, например, скорости или силы и т.д.) Направленные или ориентированные величины обозначены на рисунке буквами полужирного шрифта.

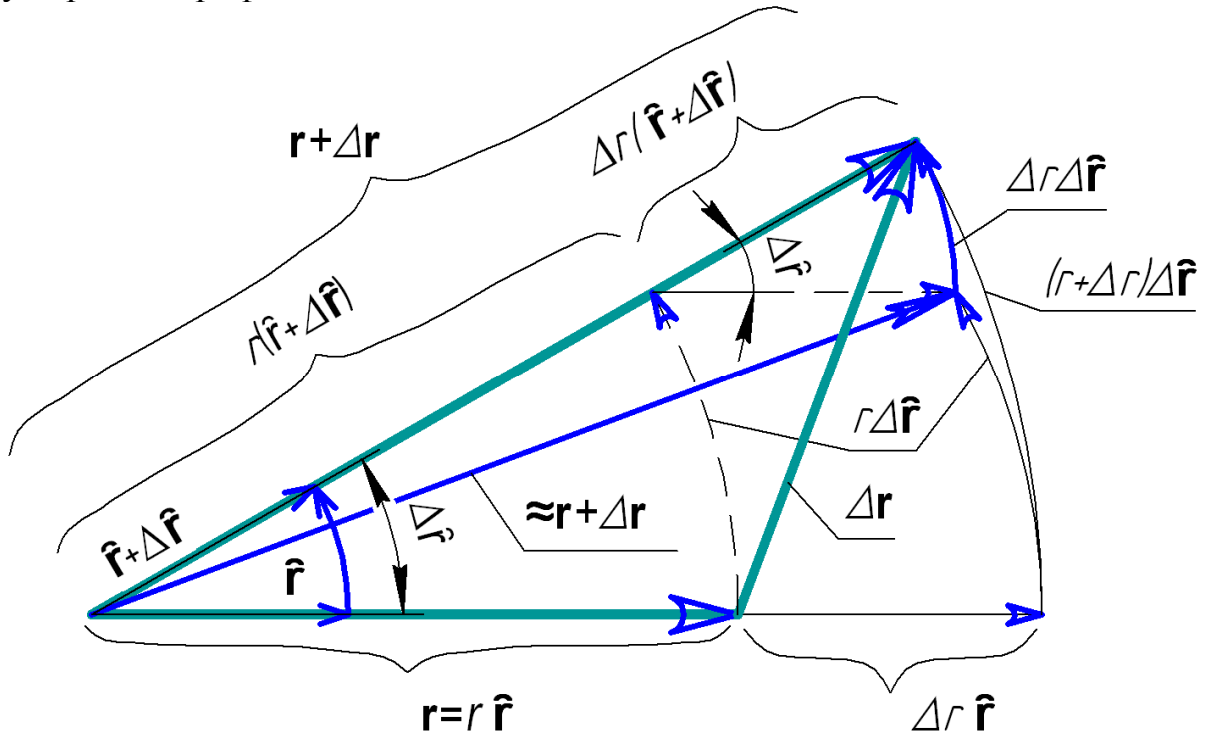


Рис. 1. Разложение изменения радиус-вектора Δr на составляющие

Как известно, вектор можно представить в виде произведения его модуля на единичный безразмерный вектор, получаемый делением вектора на его модуль. Размерность радиус-вектора в новой системе после такой искусственной подстановки

$$\dim_D \vec{r} \equiv D_P \circ L_P = \dim_D r \hat{r} = L_P \frac{D_P \circ L_P}{L_P}, \quad (3)$$

где $\vec{r} \equiv r\hat{r}$ – радиус-вектор, с одной стороны представленный, как объединение направления, символизируемого стрелочкой, и длины. А с другой стороны представленный произведением его модуля (скалярной длины) на единичный вектор.

$\frac{D_P \circ L_P}{L_P}$ – размерность единичного радиус-вектора $\hat{r}$.

$L_P \frac{D_P \circ L_P}{L_P}$ – размерность радиус-вектора, выраженная через произведение

размерностей единичного радиус-вектора и позиционной длины L_P .

Размерность объективного геометрического вектора получается аналогично, только вместо L_P пишем L .

$$\dim_D \Delta \vec{r} \equiv D_P \circ L = \dim_D r \hat{r} \equiv L \frac{D_P \circ L}{L}. \quad (4)$$

Деление в формуле размерности единичного вектора и последующее умножение в формуле размерности вектора производятся не просто на однородные размерности, а на размерность одной и той же длины. Обе размерности принадлежат одному объекту, являются одним и тем же свойством одного объекта. Соответствующие этим размерностям величины в физической формуле имеют одинаковые размеры. Поэтому данные размерности можно сократить, причём в новой системе размерность «единица» не возникает. (Отношение однородных свойств разных объектов или явлений – это пропорция величин – внесистемное понятие [9]. Отношение свойства к самому себе, т.е. размерности к самой себе, когда совпадает объект или явление, совпадает размер величины в числителе и знаменателе, нового свойства не создаёт. Не создаёт и размерности единица, потому, что нет соответствующего свойства.) Выражение вектора, как произведения его модуля на единичный вектор его направления является искусственным. Выражение вектора, как объединения направления с длиной, является основным.

Если таким же образом «подчистую» сократить размерности одной и той же длины в формуле размерности единичного вектора, то получим направление без указания его принадлежности. Кроме того, действие умножения на любой скаляр для него будет недоступно. Сокращение до единицы здесь было бы не удобным, т.к. пришлось бы вводить правило, разрешающее объединять с направлением такую особую величину с размерностью особой единицы, и вводить правило, запрещающее умножение такой единицы на любые модули, кроме длины. (Как это было в наших ранних работах). Такая величина с размерностью «нормированного модуля» только усложняла правила, усложняла запись, а не сокращала её. Отсюда можно вывести правило: размерность длины, объединённой с направлением, не сокращается при делении.

Пусть вектор $\vec{r}$ получит изменение $\Delta \vec{r}$ (см. рисунок 1).

$$\Delta \vec{r} = \Delta(r\hat{r}) \equiv (\vec{r} + \Delta \vec{r}) - \vec{r},$$

$$\vec{r} + \Delta \vec{r} = r\hat{r} + \Delta(r\hat{r}),$$

$$\Delta \vec{r} = \Delta(r\hat{r}) \equiv (r + \Delta r)(\hat{r} + \Delta \hat{r}) - r\hat{r} = (\Delta r)\hat{r} + r\Delta \hat{r} + (\Delta r)(\Delta \hat{r}), \quad (5)$$

где Δr – изменение модуля (длины) вектора,

$\Delta \hat{r}$ – изменение единичного вектора, это вектор с модулем не имеющим размерности в СИ и размером в пределах от 0 до 2;

$r + \Delta r$ – новое значение модуля вектора,

$\hat{r} + \Delta \hat{r}$ – новый единичный вектор.

Размерность изменения радиус-вектора, когда он представлен произведением единичного радиус-вектора на модуль,

$$\dim_D \Delta \vec{r} = \dim_D \Delta(\hat{r} r) \equiv \frac{D_P \circ L_P}{L_P} (L_P)_\Delta + \left(\frac{D_P \circ L_P}{L_P} \right)_\Delta L_P + \left(\frac{D_P \circ L_P}{L_P} \right)_\Delta (L_P)_\Delta. \quad (6)$$

Каждое слагаемое – прямой вектор. Задаётся тремя параметрами. Несмотря на различия форматов в записи размерностей слагаемых, соответствующие им величины остаются однородными и складываются геометрически.

Размерность изменения радиус-вектора, когда он представлен объединением направления и длины

$$\dim_D \Delta \vec{r} \equiv D_P \circ (L_P)_\Delta + (D_P)_\Delta \circ L_P + (D_P)_\Delta \circ (L_P)_\Delta, \quad (7)$$

где D_P – направление в пространстве, задаётся двумя параметрами – угловыми координатами.

$(D_P)_\Delta$ – изменение направления, то есть угол, отсчитываемый от заданного направления. Задаётся двумя параметрами в пространстве – угловыми координатами. (Автономный угол задаётся четырьмя параметрами.)

$(L_P)_\Delta$ – изменение длины радиус-вектора.

$(D_P)_\Delta \circ L_P$ – объединение изменения направления и длины радиус-вектора, т.е. не закреплённый дуговой вектор. Задаётся тремя параметрами.

Каждое слагаемое в формулах (5, 6 и 7) выражено в пространстве тремя параметрами.

Соответствующие слагаемые выражений (6) и (7) равны друг другу геометрически, т.е. производят одинаковые отображения начальной точки. Но в первом случае используются прямые векторы, а во втором случае отображения производятся при помощи «дуговых векторов» (рисунок 1).

Особый интерес представляют второе и третье слагаемое формулы (7). Действие объединения в них связывает позиционную длину или её изменение (а может связывать и объективную длину или её изменение) не с направлением – позиционной величиной, а с её конечным изменением, т.е. с углом. Такие размерности соответствуют не прямым векторам – хорошо известным геометрическим величинам, а дуговым векторам – геометрическим величинам, которые подсказаны, выявлены новой системой величин. Т.о. новая система величин, развиваясь по своим законам, начала давать результаты. Подобно прямому вектору, дуговой вектор объединяет в себе две величины без перемножения их единиц измерения. Оба вектора представляют собой геометрические (пространственные) объекты. Модуль дугового вектора – это длина дуги данного радиуса, заключённой между начальным и конечным направлениями. Важно, что таким образом длина дуги получается без действия умножения и выражается в единицах длины. Размерность длины дуги

$$\dim_D l \equiv |(D_P)_\Delta \circ L_P| \quad (8)$$

не сокращается до L_P , т.к. L_P – это – размерность модуля радиуса, а не дуги. Размерность угла, выраженного в радианах

$$\dim_D \alpha \equiv \frac{|(D_P)_{\Delta} \circ L_P|}{L_P}. \quad (9)$$

В числителе – размерность длины дуги, в знаменателе – размерность длины радиуса. Это разные размерности, хотя единицы измерения могут совпадать. Новая система величин не подчинена системе единиц, а наоборот, является первичной по отношению к системе единиц измерения.

Угол, выраженный в радианах, можно использовать как пропорцию в уравнениях. Рассуждения на тему размерностей в уравнениях и формулах, применения к размерностям знаков равенства и тождественного равенства можно найти в [9].

$$\frac{|(D_P)_{\Delta 1} \circ L_{P1}|}{L_{P1}} = \frac{|(D_P)_{\Delta 2} \circ L_{P2}|}{L_{P2}}. \quad (10)$$

В уравнении (10) одну сторону (например, левую) рассматриваем как единую величину – заданный угол (дугу единичного радиуса), выраженную в радианах. Другую сторону уравнения рассматриваем как отношение двух переменных величин: длины дуги и длины радиуса. Тогда можно найти одну из переменных величин, например, длину дуги.

$$\frac{|(D_P)_{\Delta 1} \circ L_{P1}|}{L_{P1}} L_{P2} = |(D_P)_{\Delta 2} \circ L_{P2}|. \quad (11)$$

Полученная длина дуги будет измеряться в единицах длины, выбранных для неё.

Выводы. В геометрической части DL новой системы величин применяются общие для системы DLTNM действия, формы и форматы величин, а также специфическое действие объединения длины и угла, выраженных объективно или в позиционном формате. В новой системе величин получены непротиворечивые размерности угла, дуги и радиуса. Из внутренней логики системы следует возможность рассмотрения и применения геометрической величины «дуговой вектор», которая ранее не использовалась и требует более подробного изучения и описания. Выявлены два способа представления величины угла между двумя направлениями в пространстве: с учётом пространственной ориентации (как изменение направления) и без учёта (как дуга единичного радиуса).

Список литературы

1. Huntley H.E. Dimensional analysis. Dover Publication, Inc. New York, 1967.
2. Варданян Г.С. Аксиоматическая теория размерностей и её применение в механике деформируемого твёрдого тела // Тр. Международного конгресса по применению математики в технических науках (ИКМ). - №1. Веймар, 1997.
3. Варданян Г.С. Некоторые дополнительные возможности теории размерностей // Вестник МГСУ. 2012. № 3. С. 43-50.
4. Варданян Г.С. Устранение некоторых недостатков традиционной теории анализа размерностей при исследовании задач механики деформируемого твердого тела // Вестник НИЦ Строительство. 2010. № 2. С. 11-20.

5. Терещенко В.Г. Систематизация механических величин // Фундаментальные основы механики. – 2016. – №1. – С. 18-23.
6. Терещенко В.Г. Примеры применения системы величин механики, содержащей только размерные величины // Journal of Advanced Research in Technical Science. – 2019. – Issue 14, Volume 1. – P. 64-68.
7. Терещенко В.Г. Разработка методов составления формул размерностей на основе аппарата высшей математики // Фундаментальные основы механики. – 2017. – №2. – С. 16-20.
8. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика. Берклевский курс физики: Учебник для вузов. 3-е изд., стер. – СПб.: Изд-во «Лань», 2005. – 480 с.
9. Терещенко В.Г., Гвозденко А.А., Голик А.Б. Особенности использования величин в уравнениях // Актуальные проблемы инженерных наук: материалы VII-й (64) ежегодной научно-практической конференции преподавателей, студентов и молодых учёных Северо-Кавказского федерального университета «Университетская наука – региону» (г. Ставрополь 03-29 апреля 2019 г). – Ставрополь: ООО ИД «ТЭСЭРА», 2019. – С. 285-287.

Сведения об авторе:

Терещенко Владимир Григорьевич – к.т.н., доцент, доцент кафедры технической эксплуатации автомобилей, СКФУ, г.Ставрополь.