

ЗАДАЧА ЭКСТРЕННОГО ТОРМОЖЕНИЯ УПРУГОГО ДВУХМАССОВОГО ОБЪЕКТА

Проурзин В.А., Расова С.С.

Институт проблем машиноведения РАН, г.Санкт-Петербург

Ключевые слова: оптимальное управление, упругий объект, фазовые ограничения, минимизация тормозного пути, защита водителя, лобовой удар.

Аннотация. Решена задача минимизации тормозного пути для упругого двухмассового объекта при ограничениях на управляющую силу и величину усилия в упругой связи. В зависимости от параметров задачи получены два оптимальных режима торможения: торможение с максимальной силой и равновесный режим торможения со знакопеременной тормозящей силой. Последний режим заключается в приведении системы в равновесное состояние сдвигом присоединенной массы на допустимое отклонение и последующем торможении с постоянным ускорением так, чтобы сила инерции, действующая на присоединенную массу, уравнивала реакцию упругой связи. Рассмотрен пример оптимального торможения автомобиля путем деформации его передней части при лобовом ударе.

EMERGENCY BRAKING PROBLEM OF TWO-COMPONENT ELASTIC OBJECT

Prouzrin V.A., Rasova S.S.

Institute of problems of mechanical engineering RAS, Saint-Petersburg

Keywords: optimal control, elastic object, constraint on the state, minimization of the braking distance, driver protection, automobile frontal impact.

Abstract. The problem of minimizing the stopping distance for an elastic two-mass object is solved under restrictions on the control force and the magnitude of elastic bond force. Depending on the parameters of the problem, two optimal braking modes were obtained: braking with maximum force and equilibrium braking mode with alternating braking force. The last mode is to bring the system into equilibrium by shifting the attached mass by the allowable displacement and then braking with constant acceleration so that the inertia force acting on the attached mass balances the elastic bond reaction. An example of optimal braking of a car by deforming its front part during a frontal impact is considered.

Введение. В статье ставится и решается задача экстренной остановки упругого объекта, движущегося с заданной начальной скоростью. Требуется минимизировать тормозной путь при выполнении условия сохранности упругого объекта. Такие задачи возникают на транспорте, при перемещении упругих манипуляторов, при управлении подъемно-транспортными системами, защите от столкновений. В монографиях [1,2] исследованы различные задачи управления многомассовыми упругими системами и предложен большой набор методов для их решения. Данная работа примыкает к этому направлению исследований.

Проблема экстренного торможения выглядит просто, если нет никаких ограничений кроме ограничения на тормозящую силу. В этом случае оптимальным решением будет торможение с максимальной силой до полной остановки. Особенностью рассмотренной здесь задачи является учет ограничений

на упругие реакции объекта, которые вытекают из условия сохранности объекта. Эти ограничения приводят к задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями.

Впервые задачи подобного рода были поставлены и частично решены в работах [3-5,8], где эти постановки возникли из проблемы оптимальной изоляции упругого объекта от ударных нагрузок. В этих работах существенное значение при получении результатов имело то предположение, что управляющая сила не ограничена по величине. Ограничения накладывались только на упругие реакции объекта. В задачах оптимального торможения упругого объекта ограничения на тормозящую силу играют существенную роль и не могут быть отброшены.

Здесь поставлена и решена задача экстренного торможения двухмассового упругого объекта при ограниченной управляющей силе и ограниченной реакции упругой связи. Показателем, оценивающим качество управления, выступает длина тормозного пути.

В качестве примера рассмотрена практически важная задача оптимальной защиты водителя автомобиля при лобовом ударе, где оптимальная тормозящая сила обеспечивается деформацией передней части автомобиля. Полученное здесь решение дополняют и уточняют результаты, полученные в [6,7].

1. Постановка задачи. Рассматривается система, состоящая из двух масс с линейной упругой связью (рис.1).

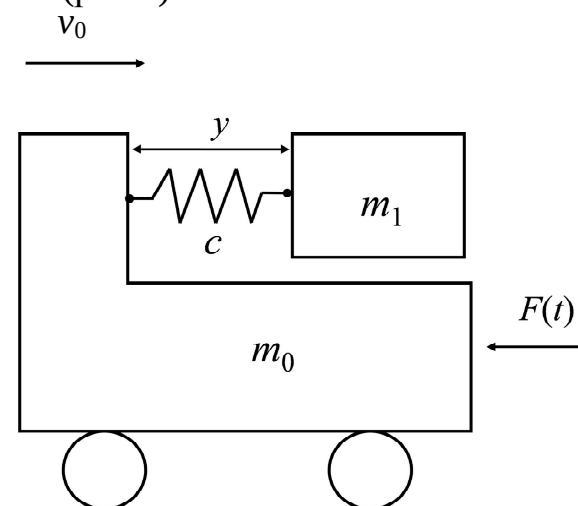


Рис. 1.

Система движется с начальной скоростью v_0 . К одной из масс, которую назовем несущей массой, приложена тормозящая сила F . Вторая масса (присоединенная масса) связана с несущей массой линейной упругой связью с коэффициентом жесткости c . Ниже записаны уравнения Ньютона в абсолютной системе координат:

$$\begin{cases} m_0 \ddot{x}_0 + c(x_0 - x_1) = F(t); \\ m_1 \ddot{x}_1 + c(x_1 - x_0) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь x_0 и x_1 – координаты несущей массы m_0 и присоединенной массы m_1 . Начальные условия: $x_k(0) = 0$, $\dot{x}_k(0) = v_0$, $k = 1, 2$. Массы m_0 , m_1 и жесткость упругой связи c – некоторые заданные положительные величины. Скорость v_0

положительна. Заданы условия сохранности упругого объекта в виде ограничения на усилие в упругой связи: $|c(x_1(t) - x_0(t))| \leq P$. Это условие удобно переписать как ограничение на упругую деформацию:

$$|x_1(t) - x_0(t)| \leq \beta, \quad (2)$$

где $\beta = P/c$. Сила $F(t)$ ограничена: $|F(t)| \leq F_0$.

Вводится показатель $J(F) = \max_t x_0(t; F)$ – тормозной путь, который вычисляется как максимальное смещение несущей массы. Ставится задача построить ограниченную по модулю силу $F^*(t)$, доставляющую минимум показателю $J(F)$ при условии сохранности (2).

Вводятся новые переменные: x – координата центра масс, $x = (m_0 x_0 + m_1 x_1)/(m_0 + m_1)$, $y = x_1 - x_0$ – отклонение присоединенной массы от несущей и управление $u(t) = -F(t)/m_0$. Модуль управления ограничен величиной $\alpha = F_0/m_0$. Вводится обозначение $\gamma = m_1/m_0$. В новых координатах система (1) примет вид:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{u(t)}{1+\gamma}; \\ \ddot{y} + \omega^2 y = u(t); \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $\omega = \sqrt{c(m_0 + m_1)/(m_0 m_1)}$ – собственная частота. Начальные условия: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$, $y(0) = \dot{y}(0) = 0$. Обратное преобразование координат имеет вид $x_0 = x - y/(1 + \gamma)$, откуда

$$J(u) = \max_t x_0(t; u) = \max_t \left(x(t; u) - \frac{\gamma}{1+\gamma} y(t; u) \right). \quad (5)$$

Интегрирование системы (3) при заданных начальных условиях дает выражение для смещения несущей массы:

$$x_0(t; u) = v_0 t - \frac{1}{\omega(1+\gamma)} \int_0^t u(\tau) (\omega(t-\tau) + \gamma \sin \omega(t-\tau)) d\tau. \quad (6)$$

Задача экстремного торможения принимает следующий вид. Построить ограниченное управление $u^*(t)$, $|u^*(t)| \leq \alpha$, доставляющее минимум показателю (5) при выполнении условия сохранности упругого объекта $|y(t; u)| \leq \beta$.

2. Решения задачи. Сформулирована задача оптимального управления с функционалом типа максимум и фазовыми ограничениями. Общие методы решения подобных задач в настоящее время не известны. Здесь рассмотрены два оптимальных режима торможения, которые охватывают большую часть области значения параметров.

2.1. Режим торможение с максимальной силой. Торможение осуществляется максимально допустимой силой $F(t) = -F_0$, соответственно $u(t) = \alpha$, на интервале времени $t \in [0, T]$, где T – момент окончательной остановки несущей массы. При $t > T$ управляющая сила полагается равной реакции упругой

связи с обратным знаком $F(t) = -cy(t)$, соответственно $u(t) = cy(t)/m_0$ и несущая масса остается в состоянии покоя. Оптимальное управление здесь имеет вид

$$u_1^*(t) = \begin{cases} \alpha, & 0 \leq t \leq T; \\ cy(t)/m_0, & t > T. \end{cases} \quad (8)$$

Минимум тормозного пути при этом управлении равен

$$J(u_1^*) = v_0 T(u_1^*) - \frac{\alpha}{1+\gamma} \left(\frac{T^2(u_1^*)}{2} + \frac{2\gamma}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega T(u_1^*)}{2} \right), \quad (9)$$

момент остановки $T(u_1^*)$ определяется из условия $\dot{x}_0(T; u_1^*) = 0$ и является минимальным положительным корнем уравнения

$$T + \frac{\gamma}{\omega} \sin \omega T = v_0 \frac{1+\gamma}{\alpha}. \quad (10)$$

Для нахождения условий допустимости управления (8) записывается решение $y(t; u_1^*)$:

$$y(t) = \begin{cases} \frac{2\alpha}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega t}{2}, & 0 \leq t \leq T; \\ \sqrt{y^2(T) + \frac{\dot{y}^2(T)}{\omega_1^2}} \cos(\omega_1(t - \tau) + \varphi), & t > T. \end{cases} \quad (11)$$

Здесь $\omega_1 = \sqrt{c/m_1}$, $\varphi = \arctan \frac{\omega_1 y(T)}{\dot{y}(T)}$,

$$\sqrt{y^2(T) + \frac{\dot{y}^2(T)}{\omega_1^2}} = \frac{2\alpha}{\omega^2} \left| \sin \frac{\omega T}{2} \right| \sqrt{1 + \gamma \cos^2 \frac{\omega T}{2}}.$$

Условие $|u_1^*| \leq \alpha$ будет выполнено, если при $t > T$ величина $c|y(t)|/m_0$ не превосходит α или $\frac{2c\alpha}{m_0\omega^2} \left| \sin \frac{\omega T}{2} \right| \sqrt{1 + \gamma \cos^2 \frac{\omega T}{2}} = \frac{2\alpha\gamma}{1+\gamma} \left| \sin \frac{\omega T}{2} \right| \sqrt{1 + \gamma \cos^2 \frac{\omega T}{2}} \leq \alpha$.

Это неравенство справедливо при любых положительных ω и T , если $\gamma \leq 1$.

Для исследования условия допустимости (2) рассматриваются два случая, в зависимости от величины T . При $T \geq \pi/\omega$ максимум модуля величины $y(t; u_1^*)$ достигается на интервале $0 \leq t \leq T$ и равен $2\alpha/\omega^2 = 2F_0\gamma/c(1+\gamma)$. Если $T < \pi/\omega$, то максимум модуля величины $y(t; u_1^*)$ достигается при $t > T$, где $y(t; u_1^*)$ описывает свободные колебания присоединенной массы с частотой $\omega_1 = \sqrt{c/m_1}$.

Этот максимум равен $\frac{2\alpha}{\omega^2} \left| \sin \frac{\omega T}{2} \right| \sqrt{1 + \gamma \cos^2 \frac{\omega T}{2}}$. Условие допустимости $|y(t; u_1^*)| \leq \beta$

записывается как ограничение на значения максимумов:

$$\begin{cases} 2F_0 \left| \sin \frac{\omega T}{2} \right| \sqrt{1 + \gamma \cos^2 \frac{\omega T}{2}} \leq F_1, & T < \pi/\omega; \\ 2F_0 \leq F_1, & T \geq \pi/\omega. \end{cases} \quad (12)$$

Здесь введено обозначение $F_1 = P(1 + \gamma)/\gamma$. При $\gamma \leq 1$ левая часть уравнения (10) монотонно растет и можно построить монотонную зависимость $T(v_0)$, а условие $T < \pi/\omega$ эквивалентно условию $v_0 \leq \pi\alpha/\omega(1 + \gamma)$.

Ниже приведено доказательство оптимальности управления (8). Пусть $\gamma \leq 1$ и выполнено условие (12). Из $\gamma \leq 1$ следует, что $|u_1^*| \leq \alpha$, а из (9) следует, что $|y(t; u_1^*)| \leq \beta$. Управление u_1^* допустимо. Используя выражение (6), запишем оценку показателя (5) при любом управлении $u(t)$, $|u(t)| \leq \alpha$:

$$\begin{aligned} J(u) &= \max_t x_0(t; u) \geq x_0(T(u_1^*); u) = \\ &= v_0 T(u_1^*) - \frac{1}{\omega(1 + \gamma)} \int_0^{T(u_1^*)} u(\tau) (\omega(T(u_1^*) - \tau) + \gamma \sin \omega(T(u_1^*) - \tau)) d\tau \geq \\ &\geq T(u_1^*) - \frac{1}{\omega(1 + \gamma)} \int_0^{T(u_1^*)} \alpha (\omega(T(u_1^*) - \tau) + \gamma \sin \omega(T(u_1^*) - \tau)) d\tau = \\ &= x_0(T(u_1^*); u_1^*) = J(u_1^*). \end{aligned}$$

Здесь использовано то, что при $\gamma \leq 1$ и $z \geq 0$ справедливо неравенство $z + \gamma \sin z \geq 0$. Для любого допустимого $u(t)$ выполнено неравенство $J(u) \geq J(u_1^*)$, что доказывает оптимальность управления u_1^* .

2.2. Равновесный режим торможения. Если условие (12) не выполнено, то торможение с максимальной силой приведет к нарушению условия (2) сохранности упругого объекта. В этой ситуации оптимальное управление имеет более сложный вид и является знакопеременной функцией.

Здесь рассматривается случай $F_0 \geq F_1$. Это неравенство эквивалентно неравенству $\beta < \alpha/\omega^2$. На параметр $\gamma = m_1/m_2$ ограничений не накладывается. Анализ численных решений при заданных ограничениях на параметры позволяет выдвинуть гипотезу, что ось времени можно разбить на три участка в зависимости от поведения оптимального управления.

На первом участке $t \in [0, t_2]$ управление имеет релейный характер с одним моментом переключения t_1 . Присоединенная масса m_1 наискорейшим образом переводится в положение с максимально допустимым натяжением упругой связи и скоростью, равной скорости несущей массы: $y(t_2) = \beta$, $\dot{y}(t_2) = 0$. На втором участке $t \in [t_2, T]$ происходит торможение системы с постоянным ускорением под действием отрицательной силы F до полной остановки системы. Тормозящая сила выбирается такой, что сила инерции, действующая на присоединенную массу, уравновешивает реакцию упругой связи, и система находится в состоянии статического равновесия и движется как твердое тело. Ее постоянное ускорение на этом участке равно $F/(m_0 + m_1)$ и условие статического равновесия имеет вид $m_1 F/(m_0 + m_1) = -P$. Здесь слева стоит сила инерции, действующая на присоединенную массу, а справа – упругая сила при максимально допустимом

растяжении β . Отсюда следует, что $F = -F_1 = -P(1 + \gamma)/\gamma$. На третьем участке при $t > T$ управляющая сила полагается равной реакции упругой связи с обратным знаком $F(t) = -cy(t)$, и несущая масса остается в состоянии покоя.

На участке $t \in [0, t_2]$ управление $u(t) = -F(t)/m_0$, $|u(t)| \leq \alpha$, переводит переменную $y(t)$, удовлетворяющую уравнению $\ddot{y} + \omega^2 y = u(t)$, из начального состояния $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$ в состояние статического равновесия $y(t_2) = \beta$, $\dot{y}(t_2) = 0$ за минимальное время t_2 . Задача оптимального быстрогодействия при управлении осциллятором решена [9]. Известно, что неравенство $\beta < 2\alpha/\omega^2$ является достаточным условием того, что при заданных начальных условиях решением задачи оптимального быстрогодействия является релейное управление с одним переключением в момент t_1 :

$$u^*(t) = \begin{cases} \alpha, & 0 \leq t < t_1; \\ -\alpha, & t_1 \leq t < t_2. \end{cases} \quad (13)$$

Для нахождения моментов переключения управления (13) выписываются решения системы (3) интервале $0 \leq t \leq t_2$. При $0 \leq t \leq t_1$

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 t - \frac{\alpha t^2}{2(1 + \gamma)}; & \dot{x}(t) &= v_0 - \frac{\alpha t}{1 + \gamma}; \\ y(t) &= \frac{\alpha}{\omega^2} (1 - \cos \omega t); & \dot{y}(t) &= \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (14)$$

При $t_1 < t \leq t_2$

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_1) + \dot{x}(t_1)(t - t_1) - \frac{\alpha(t - t_1)^2}{2(1 + \gamma)}; \\ \dot{x}(t) &= \dot{x}(t_1) + \frac{\alpha(t - t_1)}{1 + \gamma} = v_0 + \frac{\alpha(t - 2t_1)}{1 + \gamma}; \\ y(t) &= \left(y(t_1) + \frac{\alpha}{\omega^2} \right) \cos \omega(t - t_1) + \frac{\dot{y}(t_1)}{\omega} \sin \omega(t - t_1) - \frac{\alpha}{\omega^2}; \\ \dot{y}(t) &= -\omega \left(y(t_1) + \frac{\alpha}{\omega^2} \right) \sin \omega(t - t_1) + \dot{y}(t_1) \cos \omega(t - t_1). \end{aligned} \quad (15)$$

Искомые моменты времени есть минимальные положительные решения системы двух алгебраических уравнений относительно неизвестных t_1 , t_2 :

$$\begin{cases} y(t_2) = \beta; \\ \dot{y}(t_2) = 0. \end{cases}$$

Эти решения имеют вид:

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \arccos(1 - \theta - \theta^2); \quad t_2 = t_1 + \frac{\pi}{2\omega} - \frac{1}{\omega} \arctan \frac{1 + \theta + \theta^2}{\sqrt{1 - (1 - \theta - \theta^2)^2}},$$

где $\theta = F_1/2F_0$. Поскольку при ограничении $F_0 \geq F_1$ выполнено $0 < \theta \leq 0.5$, то $\omega t_1 < \pi/2$ и $\omega t_2 < \pi$. Функция $y(t; u_2^*)$ монотонно возрастает на интервале

$0 \leq t \leq t_2$. В результате построено управление при равновесном режиме торможения

$$u_2^*(t) = \begin{cases} \alpha, & 0 \leq t < t_1; \\ -\alpha, & t_1 \leq t < t_2; \\ F_1/m_0, & t_2 \leq t < T; \\ cy(t)/m_0, & t \geq T. \end{cases} \quad (16)$$

В момент времени t_2 обе массы имеют одинаковую скорость, равную $\dot{x}(t_2) = v_0 - v_1$, где $v_1 = \alpha(2t_1 - t_2)/(1 + \gamma)$. Если начальная скорость $v_0 \leq v_1$, то в формуле (14) полагается $T = t_2$. В момент $t = t_2$ в случае $v_0 = v_1$ обе массы покоятся, а в случае $v_0 < v_1$ они движутся в отрицательном направлении. Максимум смещения несущей массы в случае $v_0 \leq v_1$ достигается на интервале $0 \leq t \leq t_1$. Эта ситуация описана в подразделе 2.2. Момент T_1 достижения этого максимума определяется из решения алгебраического уравнения (10). Минимум тормозного пути равен

$$J_1^* = v_0 T_1 - \frac{\alpha}{1 + \gamma} \left(\frac{T_1^2}{2} + \frac{2\gamma}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega T_1}{2} \right).$$

В данном случае управление (14) приводит к остаточной отрицательной скорости смещения несущей массы и момент $T = t_2$ не является моментом остановки. На оптимальности управления (16) это не сказывается.

Если начальная скорость $v_0 > v_1$, то скорость масс в момент $t = t_2$ положительна. На интервале времени $t_2 \leq t \leq T$ происходит их торможение как единого твердого тела до полной остановки. На этом интервале управление

$$u_2^*(t) = \frac{F_1}{m_0} = (1 + \gamma)\beta\omega^2, \quad y(t) = \beta, \quad x(t) = x(t_2) + (v_0 - v_1)(t - t_2) - \beta\omega^2(t - t_2)^2/2,$$

$\dot{x}(t) = v_0 - v_1 - \beta\omega^2(t - t_2)$. Используя выражения (14) и (15), можно записать, что $x(t_2) = v_0 t_2 - 2\alpha t_1 t_2/(1 + \gamma) - 3\alpha t_1^2/2(1 + \gamma)$. Момент остановки T определяется из уравнения $\dot{x}(T) = 0$ и равен

$$T(u_2^*) = \frac{v_0 - v_1}{\beta\omega^2} + t_2. \quad (17)$$

В момент остановки $T(u_2^*)$ помимо первого максимума J_1^* достигается второй локальный максимум смещения несущей массы, равный

$$J_2^* = x(t_2) + \frac{(v_0 - v_1)^2}{2\beta\omega_1^2} - \frac{\gamma\beta}{1 + \gamma}.$$

Первый максимум на интервале $0 < t < t_1$ существует, если корень уравнения (10) принадлежит этому интервалу. Это условие, в силу неравенства $\omega t_1 < \pi/2$, эквивалентно условию $v_0 < v_2$, где

$$v_2 = \frac{\alpha}{1 + \gamma} \left(t_1 + \frac{\gamma}{\omega} \sin \omega t_1 \right).$$

При $v_0 \geq v_2$ первый максимум исчезает, и остается единственный максимум в точке $T(u_2^*)$. Из неравенств $0 < \omega t_1 < \pi/2$ и $t_2 > t_1$ следует неравенство $v_2 > v_1$, поскольку $v_2 - v_1 = \frac{\alpha}{1 + \gamma} \left(\frac{\gamma}{\omega} \sin \omega t_1 + t_2 - t_1 \right) > 0$.

Окончательно можно записать

$$J(u_2^*) = \begin{cases} J_1^*, & v_0 \leq v_1; \\ \max\{J_1^*, J_2^*\}, & v_1 < v_0 < v_2; \\ J_2^*, & v_0 \geq v_2; \end{cases} \quad (18)$$

Доказательство оптимальности управления u_2^* проводится с помощью приема, примененном в работе [4] для решения аналогичной задачи, но без ограничения на управление. Прием заключается в использовании переменной $y = x_1 - x_0$ в качестве нового ограниченного управления, $|y(t)| \leq \beta$. Для переменных x_0, y систему (1) можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 = -\frac{c}{m_0} y - u; \\ \ddot{y} + \omega^2 y = u. \end{cases}$$

Второе уравнение этой системы как выражение для u подставляется в первое уравнение. В итоге получено уравнение $\ddot{x}_0 = -\ddot{y} - \omega_1^2 y$, где $\omega_1^2 = c/m_1$. При отсутствии ограничений на управление $u(t)$ исходная задача сводится к следующей вариационной задаче. Построить функцию $y(t)$, доставляющую минимум функционалу

$$J_1(y) = \max_t x_0(t) = \max_t \left(v_0 t - y(t) - \omega_1^2 \int_0^t \int_0^\tau y(s) ds d\tau \right)$$

при ограничении $|y(t)| \leq \beta$. Минимум этого функционала достигается при $y^*(t) = \beta$, $0 \leq t \leq T$, где $T = v_0 / \beta \omega_1^2$. В момент времени $t = T$ несущая масса останавливается и при $t > T$ переменная $y^*(t) = \beta \cos \omega_1(t - T)$ описывает свободные колебания присоединенной массы. При начальных условиях $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$ оптимальная переменная $y^*(t)$ совершает мгновенный скачок от нуля до β в момент $t = 0$ без изменения скорости. Мгновенное смещение массы m_0 на расстояние β без изменения скорости осуществляется приложением к ней силы в виде импульсной функции $m_0 \beta \delta'(t)$ – производной дельта-функции Дирака. Управление, соответствующее $y^*(t)$, равно $u^*(t) = \beta \delta'(t) + F_1/m_0$ при $t < T$. При $t > T$ управление $u^*(t) = c\beta/m_0 \cos \omega_1(t - T)$ компенсирует колебания присоединенной массы, и несущая масса остается в покое. Минимальный путь торможения в этом случае равен $v_0^2 / 2\beta \omega_1^2 - \beta$.

Наличие ограничения $|u(t)| \leq \alpha$ приводит к тому, что переменная $y(t)$ может перейти из состояния $y=0$, $\dot{y}=0$ в состояние $y=\beta$, $\dot{y}=0$ только гладким образом. Рассматриваются ограниченные функции $y(t;u)$, $|y(t;u)| \leq \beta$, удовлетворяющие уравнению $\ddot{y} + \omega^2 y = u$ с начальными условиями $y(0)=0$, $\dot{y}(0)=0$, $|u(t)| \leq \alpha$. Покажем, что на интервале $0 \leq t \leq T(u_2^*)$ выполнено неравенство $y(t;u_2^*) \geq y(t;u)$. Действительно, управление u_2^* по построению переводит систему из состояния $y=0$, $\dot{y}=0$ в состояние $y=\beta$, $\dot{y}=0$ за минимальное время t_2 . Отсюда следует, что при любом другом управлении $u(t)$, $|u(t)| \leq \alpha$, обеспечивающем выполнение неравенства $|y(t;u)| \leq \beta$, выполнено $y(t;u_2^*) \geq y(t;u)$ при $0 \leq t \leq t_2$. При $t_2 \leq t \leq T(u_2^*)$ выполнено $y(t;u_2^*) = \beta \geq y(t;u)$. Из доказанного неравенства очевидно следуют неравенства $x_0(t;u_2^*) \leq x_0(t;u)$ при $t_2 \leq t \leq T(u_2^*)$ и $J_1(y(t;u_2^*)) \leq J_1(y(t;u))$. Оптимальность управления u_2^* доказана.

3. Анализ результатов и пример. Получены два различных решения задачи для двух областей значений параметров. Если выполнено условие (12) и неравенство $\gamma \leq 1$, то оптимальное управление имеет вид (8), а минимум тормозного пути и время торможения задаются выражениями (9), (10). Если справедливо неравенство $F_0 \geq F_1$, то оптимальное управление имеет вид (16), минимум тормозного пути задается выражением (18), время торможения при $v_0 \geq v_1$ задается выражением (17). При $v_0 < v_1$ за время торможения можно принять величину T_1 — решение алгебраического уравнения (10).

Для характеристики областей параметров задачи, для которых построены решения, вводятся два безразмерных параметра: $f = \frac{F_0}{F_1} = \frac{m_0 F_0}{(m_0 + m_1)P}$ и $\tau = \frac{\omega T}{\pi} = \frac{c(m_0 + m_1)T}{\pi m_0 m_1}$. Параметр τ характеризует время остановки, которое, в свою очередь, монотонно зависит от начальной скорости v_0 . На рис.2 приведена плоскость значений параметров f , τ и построены области, соответствующие режиму торможения с максимальной силой (область I) и равновесному режиму торможения (область II).

Область I задается условием (12). На рис.2 показана ее граница при $\gamma = 1$. В этой области решение задачи имеет вид $u = u_1^*(t)$. Область II задается неравенством $f \geq 1$. В этой области решение задачи имеет вид $u = u_2^*(t)$. Области I и II пересекаются при малых значениях параметра τ . Общая часть двух областей ограничена осью ординат, прямой $f = 1$ и частью границы области I (пунктирная линия). Если $\gamma \leq 1$, то для значений параметров, попадающих в пересечение двух областей, оба управления u_1^* и u_2^* будут решением поставленной задачи. При $\gamma > 1$ решение получено только в области II. Задача построения оптимального управления в области III остается открытой.

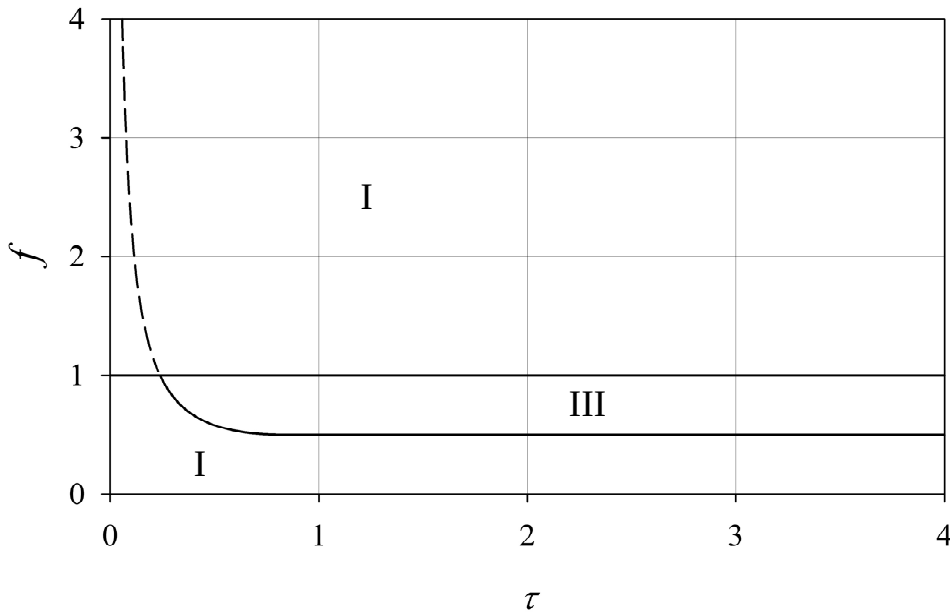


Рис. 2.

3.1. Пример защиты водителя при лобовом столкновении. В качестве практически важного примера экстренного торможения рассмотрена задача оптимальной защиты водителя автомобиля и пассажиров при лобовом столкновении. Автомобиль массой m_0 при скорости v_0 врывается в неподвижную преграду. Водитель массы m_1 закреплен ремнями безопасности, упругие свойства которых заданы. Наличие подушки безопасности учитывается как дополнительная упругая связь. Торможение автомобиля (гашение удара) происходит за счет деформации бампера и передней части автомобиля. Их конструкция выбирается таким образом, чтобы торможение автомобиля было безопасным для водителя, а путь торможения (величина деформации передней части корпуса) был бы минимальным.

Пусть $m_0 = 1250 \text{ кг}$, $m_1 = 80 \text{ кг}$, начальная скорость соударения $v_0 = 20 \text{ м/с}$, тормозящая сила ограничена величиной $F_0 = 5 \times 10^6 \text{ Н}$. Предельно допустимая перегрузка водителя при столкновении принимается равной $40g$. Предельное усилие в упругой связи соответственно равно $P = 80 \text{ кг} \times 400 \text{ м/с}^2 = 32000 \text{ Н}$. Максимальное натяжение упругой связи принято равным $\beta = 0.1 \text{ м}$. Расчетная жесткость упругой связи $c = P/\beta = 320000 \text{ Н/м}$. Частота $\omega = 65.23801/\text{с}$ (10.3829 Гц), $\alpha = 4000 \text{ м/с}^2$, $\gamma = 0.064$, $F_1 = 532000 \text{ Н}$.

Здесь параметр $f > 1$ и осуществляется равновесный режим экстренного торможения. При этом $t_1 = 0.00515554 \text{ с}$, $t_2 = 0.00979861 \text{ с}$, $v_1 = 1.92661 \text{ м/с}$, $v_2 = 20.5989 \text{ м/с}$, $T = 0.0549821 \text{ с}$, $J(u_2^*) = 0.498836 \text{ м}$. На рис. 3 приведен график оптимального управления $u_2^*(t)$, построенного по формуле (16). На рис. 4 построен график пути $x_0(t; u_2^*)$ несущей массы (сплошная линия) и график $y(t; u_2^*)$ смещения присоединенной массы относительно несущей массы (пунктирная линия).

При практической реализации построенного управления возникает сложность с реализацией этого управления на участке $0 \leq t \leq t_2$. Смысл этого участка состоит в том, что в начале столкновения водитель сдвигается вперед на максимально допустимое расстояние β , а ремни безопасности натягиваются с максимально допустимой силой P . В дальнейшем при торможении под действием силы $F(t) = -F_1$ водитель остается неподвижным относительно автомобиля до полной остановки.

Такой же эффект может быть достигнут другим путем. Известно и широко используется устройство ремней безопасности с натяжителями (преднатяжителями). При столкновении натяжители ремней безопасности автоматически сматывают ремни против направления вектора силы и блокируют перемещение водителя вперед.

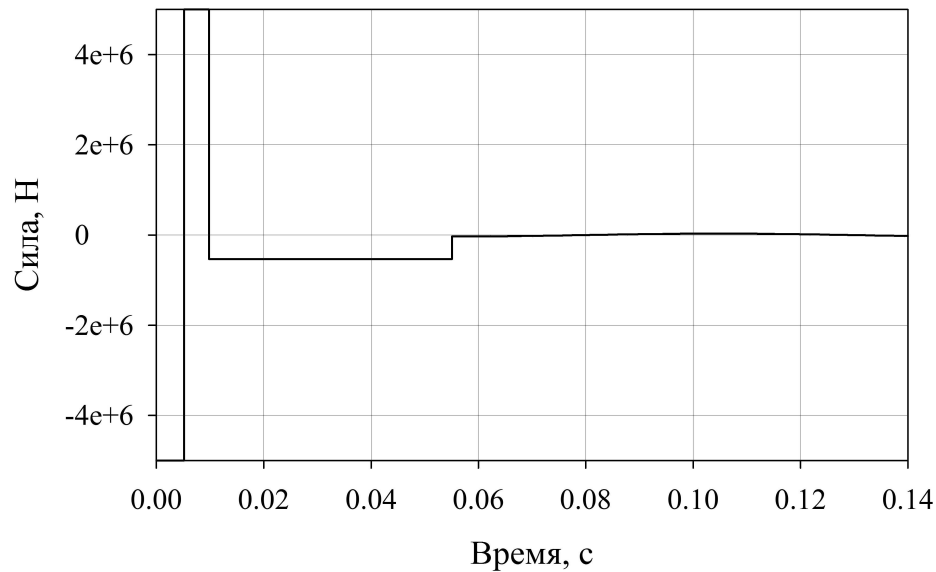


Рис. 3.

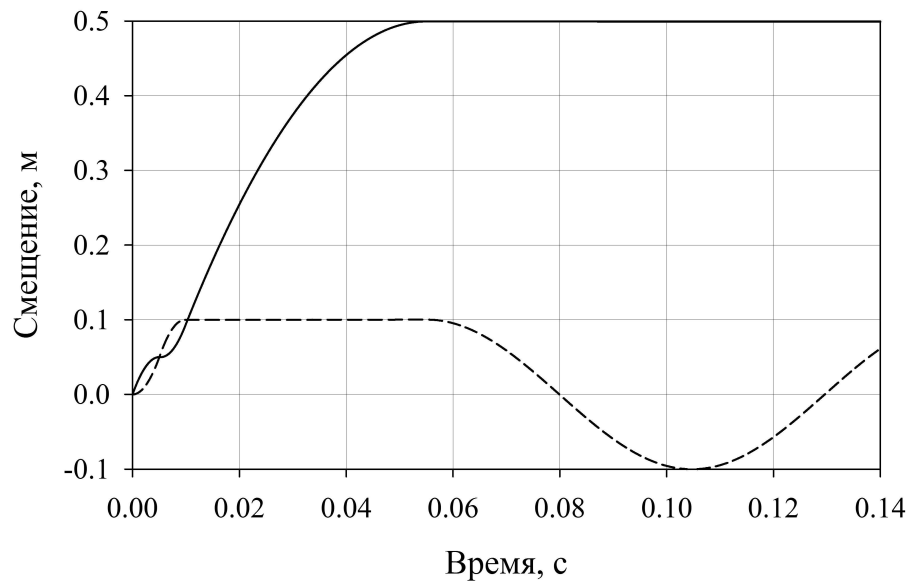


Рис. 4.

Таким образом, если преднатяжитель будет натянут с силой P , то будет достигнут тот же самый эффект, что и при действии первого участка

оптимального управления. В результате необходимость в первом участке управления отпадает и оптимальное управление примет вид

$$u_3^*(t) = \begin{cases} F_1/m_0, & 0 \leq t < T; \\ cy(t)/m_0, & t \geq T; \end{cases}$$

при условии, что натяжитель отработал к моменту $t=0$. При наличии натяжителей тормозящая сила, вызванная деформацией передней части автомобиля, должна быть постоянна и равна $-F_1$ до полной остановки. Момент остановки и тормозной путь в этом случае $T = v_0 m_1 / P$, $J(u_3^*) = v_0^2 m_1 / 2P$. Для принятых в примере значений параметров эти показатели равны $T = 0.05$ с, $J(u_3^*) = 0.5$ м. Таким образом, если натяжитель ремня безопасности срабатывает достаточно быстро и реализует натяжение, равное P , то его использование не ухудшает показатели качества экстренного торможения и упрощает реализацию оптимального тормозящего управления.

Заключение

Построены оптимальные режимы торможения двухмассового упругого объекта, минимизирующие тормозной путь при заданной начальной скорости и ограничении на реакцию упругой связи. Метод построения оптимального управления для данной задачи состоял из двух этапов. На первом этапе задача решалась численно с заданной точностью при различных значениях параметров. Анализ полученных решений позволил выделить несколько оптимальных режимов торможения и сформулировать гипотезы о виде оптимального управления для каждого режима. На втором этапе эти гипотезы были исследованы, скорректированы и строго доказаны.

В случае, когда ограничение на управляющую силу больше определенной величины, построенное оптимальное управление имеет нетривиальную знакопеременную зависимость от времени. Эта зависимость имеет ясный механический смысл: на первом этапе присоединенная масса наискорейшим образом переводится в положение с максимально допустимым натяжением упругой связи и скоростью, равной скорости несущей массы. На втором этапе происходит торможение системы с постоянным ускорением таким, что сила инерции, действующая на присоединенную массу, уравнивает реакцию упругой связи. В результате система находится в состоянии статического равновесия и движется как твердое тело до полной остановки. Рассмотрен пример оптимальной защиты водителя автомобиля при лобовом ударе, где оптимальная тормозящая сила обеспечивается деформацией передней части автомобиля.

Результаты, полученные в статье, будут полезны при управлении движением упругих объектов таких, как манипуляторы, транспорт, противоударная изоляция и т.п.

Список литературы

1. Черноушко Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384с.

2. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 328с.
3. Баландин Д.В., Болотник Н.Н. Оптимальная противоударная изоляция двухкомпонентного вязкоупругого объекта // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 2. С. 45-59.
4. Prourzin V. A. A problem of optimal shock isolation of elastic objects // Mechanics of solids. – 2004. – Т. 39. – №. 2. – С. 22-29
5. Проурзин В.А. Оптимальная противоударная изоляция двухкомпонентного упругого объекта // Известия РАН. Теория и системы управления. 2018. № 1. С. 1–16.
6. Kent R.W., Balandin D.V., Bolotnik N.N., Pilkey W. D., Purtsezov S.V. Optimal Control of Restraint Forces in an Automobile Impact // Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. 2006. No 4. V.129. P.415-424.
7. Kent R.W., Purtsezov S.V., Pilkey W. D. Limiting performance analysis of a seat belt system with slack // International Journal of Impact Engineering. 2007. No 8. V.34. P. 1382-1395.
8. Проурзин В.А., Щербатюк С.Ф. Оптимальные импульсные характеристики устройств ударозащиты упругого объекта // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2011. № 3. С. 100-111.
9. Понтрягин Н.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392с.

Сведения об авторах:

Проурзин Владимир Афанасьевич – к.ф.-м.н., с.н.с., ИПМаш РАН, г.Санкт-Петербург;

Расова София Станиславовна – к.ф.-м.н., с.н.с., ИПМаш РАН, г.Санкт-Петербург.