

## СИНТЕЗ СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО МАЯТНИКА МЕТОДОМ КОМПЕНСАЦИИ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ

*Заика В.В., Масленников А.Л.*

*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,  
г.Москва*

**Ключевые слова:** сферический маятник, математический сферический маятник, физический сферический маятник, нелинейные системы, синтез нелинейных систем, метод компенсации нелинейностей, ПИ-регулятор.

**Аннотация.** В статье рассматривается задача синтеза системы регулирования нелинейной системы сферического маятника с использованием метода компенсации нелинейностей. Решение данной задачи приводится как для случая математического, так и для случая физического сферического маятника. Синтез линейной системы регулирования реализуется за счет формирования ПИ-регуляторов по ошибкам углов отклонений по величинам отклонения угловых скоростей от нуля. Математическое моделирование синтезированной системы регулирования подтверждает применимость метода компенсации нелинейностей для синтеза нелинейных систем рассматриваемого типа.

## SPHERICAL PENDULUM CONTROL SYNTHESIS VIA NONLINEARITIES COMPENSATION

*Maslennikov A.L., Zaika V.V.*

*Moscow state technical university named after N.E. Bauman, Moscow*

**Keywords:** spherical pendulum, mathematical spherical pendulum, physical spherical pendulum, nonlinear systems, nonlinear systems control, nonlinearities compensation.

**Abstract.** In this paper control synthesis problem for the nonlinear system spherical pendulum via nonlinearities compensation method is considered. Solution is provided for both cases: mathematical and physical types of spherical pendulum. Synthesis of a linear system is performed with PI regulators for angles and angular velocities regulatory errors. Numerical simulation of the derived control system shown the applicability of the nonlinearities compensation method for such control problems.

### Введение

Однозвенный сферический маятник – это нелинейная динамическая система, которая для случая математического сферического маятника в сферической системе координат описывается следующей системой дифференциальных уравнений, приведенной к форме Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_4^2 \cos x_1 \sin x_1 + \frac{mg}{l} \sin x_1 - \frac{\mu}{ml^2} x_2 + \frac{1}{ml^2} u_\theta \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -2x_2 x_4 \frac{\cos x_1}{\sin x_1} - \frac{\mu}{ml^2 \sin^2 x_1} x_4 + \frac{1}{ml^2 \sin^2 x_1} u_\varphi \end{cases} \quad (1)$$

а для случая физического сферического маятника:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{mr_c^2 x_4^2 \sin x_1 \cos x_1 + mgr_c \sin x_1 - \mu x_2 + u_\theta}{mr_c^2 + \frac{m_l l^2}{3} + m_b (r+l)^2} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{-2mr_c^2 x_4 x_2 \sin x_1 \cos x_1 - \mu x_4 + u_\varphi}{mr_c^2 \sin^2 x_1 + \frac{m_l l^2}{3} + m_b (r+l)^2} \end{cases} \quad (2)$$

Для данных систем вектор состояния задается в следующем виде:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \\ x_3 = \varphi \\ x_4 = \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

В уравнениях (1) и (2) и ряде последующих уравнений в целях упрощения восприятия опущена явная зависимость от времени элементов вектора  $\mathbf{x}$  и управлений  $u_\theta(t)$ ,  $u_\varphi(t)$ ,  $v_\theta(t)$ ,  $v_\varphi(t)$ . Подробное описание математических моделей сферического маятника обоих типов приведено в работе [1].

В рассматриваемой системе управление по каждому углу  $u_\theta(t)$  и  $u_\varphi(t)$  формируется с целью регулирования – стабилизации системы в некотором заданном положении после перехода из некоторого исходного положения. Для линейных систем синтез подобной системы регулирования достаточно легко решается с использованием различных вариантов ПИД-регуляторов [2]. Для нелинейных систем сформировать ПИД-регулятор в явном виде не представляется возможным и для решения этой проблемы в данной работе предлагается использовать метод компенсации нелинейностей [3, 4].

### Метод компенсации нелинейностей

Метод компенсации нелинейностей применим для нелинейных систем, в которых закон управления может быть структурно выделен, т.е. уравнение состояния системы представимо в виде:

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + g(x, t) u(t)$$

где  $f(x, t)$ ,  $g(x, t)$  в общем случае – нелинейные функции. Тогда, сформировав закон регулирования  $u(t)$  в следующем виде:

$$u(t) = \frac{-f(x, t) + v(t)}{g(x, t)} \quad (3)$$

получим линейную систему следующего вида:

$$\dot{x}(t) = v(t)$$

Для полученной линейной системы решается задача синтеза закона регулирования  $v(t)$  любым известным и подходящим методом. Затем осуществляется возврат к исходной нелинейной системе, где  $v(t)$  используется при вычислении  $u(t)$  в соответствии с уравнением (3).

Отметим, что в случае, если  $f(x,t)$  содержит линейную часть, которую можно структурно выделить, то тогда нет необходимости ее компенсировать, а также то, что данный подход может быть легко расширен на случай описания системы из нескольких дифференциальных уравнений.

### Синтез системы регулирования сферического маятника

Для математической модели сферического маятника в форме Коши, описанной уравнением (1), используя идею метода компенсации нелинейностей, можно сформировать закон регулирования по каждому углу в следующем виде:

$$u_{\theta} = -ml^2 \left( x_4^2 \cos x_1 \sin x_1 + \frac{mg}{l} \sin x_1 \right) + ml^2 v_{\theta}$$

$$u_{\varphi} = ml^2 \sin^2 x_1 \left( 2x_2 x_4 \frac{\cos x_1}{\sin x_1} + \frac{\mu}{ml^2 \sin^2 x_1} x_4 - \frac{\mu}{ml^2} x_4 \right) + ml^2 \sin^2 x_1 v_{\varphi}$$

Полученная после этого линейная система дифференциальных уравнений, приведенных к форме Коши примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{\mu x_2}{ml^2} + v_{\theta} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -\frac{\mu x_4}{ml^2} + v_{\varphi} \end{cases}$$

Аналогичным образом можно сформировать закон регулирования по каждому углу и для физического сферического маятника, который описывается системой уравнений (2):

$$u_{\theta} = -(mr_c^2 x_4^2 \sin x_1 \cos x_1 + mgr_c \sin x_1) + \left( mr_c^2 + \frac{m_l l^2}{3} + m_b (r+l)^2 \right) v_{\theta}$$

$$u_{\varphi} = 2mr_c^2 x_4 x_2 \sin x_1 \cos x_1 + \mu x_4 - \left( mr_c^2 \sin^2 x_1 + \frac{m_l l^2}{3} + m_b (r+l)^2 \right) \left( \frac{\mu x_4}{mr_c^2 + \frac{m_l l^2}{3} + m_b (r+l)^2} - v_{\varphi} \right)$$

соответствующая линейная система дифференциальных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{-\mu x_2}{mr_c^2 + \frac{m_l l^2}{3} + m_b (r+l)^2} + v_{\theta} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{-\mu x_4}{mr_c^2 + \frac{m_l l^2}{3} + m_b (r+l)^2} + v_{\varphi} \end{cases}$$

Для полученных линейных систем задача регулирования решается с использованием ПИ-регуляторов по величинам ошибок углов отклонения (относительно заданных) и величинам ошибок угловых скоростей (относительно нулевых). В этом случае законы управления для описанных выше линейных систем можно записать в виде:

$$v_{\theta}(t) = \mu_{\theta}(t) + \mu_{\dot{\theta}}(t)$$

$$v_{\varphi}(t) = \mu_{\varphi}(t) + \mu_{\dot{\varphi}}(t)$$

где  $\mu_{\theta}(t)$ ,  $\mu_{\dot{\theta}}(t)$ ,  $\mu_{\varphi}(t)$ ,  $\mu_{\dot{\varphi}}(t)$  – соответствующие ПИ законы регулирования по углам и угловым скоростям. Ошибки по углу определяются следующим образом:

$$\theta_{\text{err}}(t) = \theta_{\text{зад}}(t) - \theta(t)$$

$$\varphi_{\text{err}}(t) = \varphi_{\text{зад}}(t) - \varphi(t)$$

а интегралы ошибок по углу вычисляются следующим:

$$\theta_{\text{err\_int}}(t) = \theta_{\text{err\_int}}(t) + \theta_{\text{err}}(t) \Delta t$$

$$\varphi_{\text{err\_int}}(t) = \varphi_{\text{err\_int}}(t) + \varphi_{\text{err}}(t) \Delta t$$

В результате, ПИ законы регулирования по каждому углу формируем как сумму ошибок, умноженных на соответствующие коэффициенты:

$$\mu_{\theta}(t) = k_{p\theta} \theta_{\text{err}}(t) + k_{i\theta} \theta_{\text{err\_int}}(t)$$

$$\mu_{\varphi}(t) = k_{p\varphi} \varphi_{\text{err}}(t) + k_{i\varphi} \varphi_{\text{err\_int}}(t)$$

Аналогичным образом ПИ-законы регулирования по угловым скоростям примут вид:

$$\mu_{\dot{\theta}}(t) = k_{p\dot{\theta}} \dot{\theta}_{\text{err}}(t) + k_{i\dot{\theta}} \dot{\theta}_{\text{err\_int}}(t)$$

$$\mu_{\dot{\varphi}}(t) = k_{p\dot{\varphi}} \dot{\varphi}_{\text{err}}(t) + k_{i\dot{\varphi}} \dot{\varphi}_{\text{err\_int}}(t)$$

где  $\dot{\theta}_{\text{err}}(t)$ ,  $\dot{\varphi}_{\text{err}}(t)$ ,  $\dot{\theta}_{\text{err\_int}}(t)$ ,  $\dot{\varphi}_{\text{err\_int}}(t)$  – соответствующие ошибки по угловым скоростям. Отметим, что для определения коэффициентов ПИ-регуляторов можно использовать любой подходящий метод.

### Математическое моделирование системы управления

Моделирование рассматриваемых нелинейных систем реализуется одношаговым методом Рунге-Кутты 4-го порядка [5, 6], со следующими параметрами системы:

|                                                                             |     |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----|
| Масса маятника $m_T$ , кг .....                                             | 1   |
| Масса шара $m_b$ , кг .....                                                 | 0,5 |
| Масса стержня $m_l$ , кг .....                                              | 0,5 |
| Радиус шара $r$ , м.....                                                    | 0,1 |
| Длина стержня $l$ , м (математический маятник).....                         | 1   |
| Длина стержня $l$ , м (физический маятник).....                             | 0,9 |
| Коэффициент демпфирования $\mu$ , Дж · с <sup>2</sup> /м <sup>2</sup> ..... | 0,5 |

Величина ускорения свободного падения вычисляется в зависимости от географических координат по формуле из работы [7]. Значения коэффициентов ПИ-регулятора, следующие:

$$k_{p\theta} = k_{p\phi} = 60$$

$$k_{i\theta} = k_{i\phi} = 0.05$$

$$k_{p\dot{\theta}} = k_{p\dot{\phi}} = 20$$

$$k_{i\dot{\theta}} = k_{i\dot{\phi}} = 0.01$$

Заданные для стабилизации значения углов:  $\theta_{\text{зад}} = 150^\circ$  и  $\phi_{\text{зад}} = 60^\circ$ , а требуемые значения угловых скоростей – нулевые.

Результаты моделирования математического сферического маятника представлены на рис. 1., а для физического сферического маятника – на рис. 2.

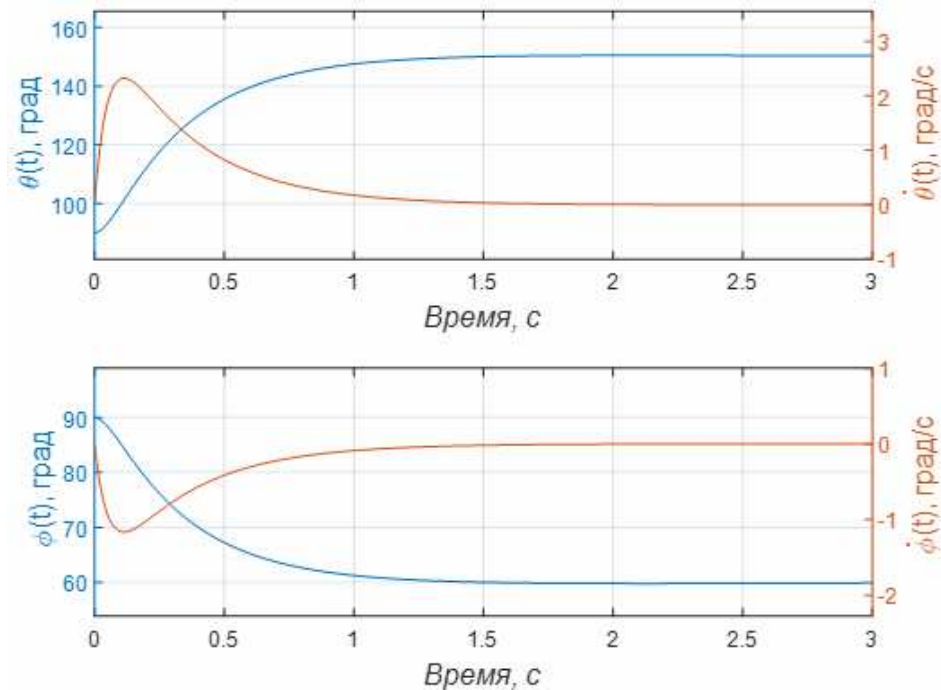


Рис. 1. Моделирование системы регулирования математического сферического маятника

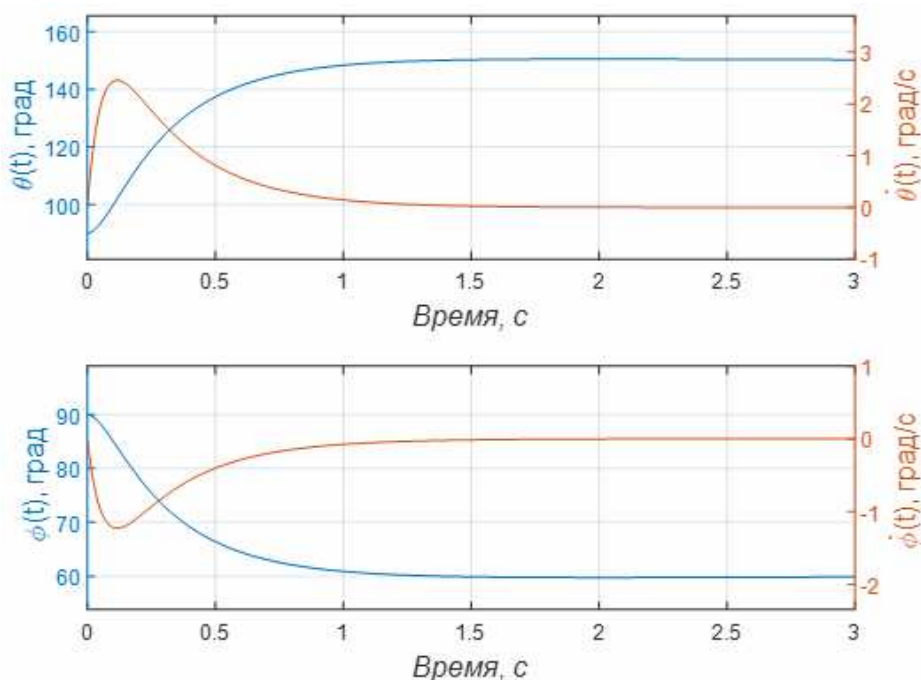


Рис. 2. Моделирование системы регулирования физического сферического маятника

Отчетливо видно, что система регулирования выполняет свою задачу – происходит переход системы из начального положения в заданное положение и последующая стабилизация как для случая математического, так и для случая физического сферического маятника.

### **Заключение**

В работе рассмотрено применение метода компенсации нелинейностей для синтеза системы регулирования нелинейной динамической системы сферического маятника (как для математического, так и для физического случаев). В качестве метода синтеза линейной системы использован ПИ-регулятор. Результаты моделирования подтверждают возможность применения данного метода синтеза исходной нелинейной системы.

### **Список литературы**

1. Заика В.В., Масленников А.Л. Математическое моделирование однозвенного сферического маятника в сферической системе координат // Политехнический молодежный журнал МГТУ имени Н.Э. Баумана. Электронный журнал. 2019. Вып. 9. С. 1-9. DOI: 10.18698/2541-8009-2019-09-522.
2. Филлипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. 616 с.
3. Khalil H.K. Nonlinear Systems, 3rd Edition, Prentice-Hall, 2002, 750 p.
4. Филюшов В.Ю. Линеаризация обратной связью: эвристический подход // Сборник научных трудов НГТУ. 2016. Вып. 1. С. 37-46.
5. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы. Учебное пособие. Санкт-Петербург: Лань, 2014, 672 с.
6. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. Учебник. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2017. 640 с.
7. Физическая энциклопедия. Т.4. / под ред. Прохорова А.М. М.: Большая российская энциклопедия, 1994. 704 с.

### **Сведения об авторах:**

*Заика Валерия Владимировна* – студентка, МГТУ им. Н.Э. Баумана, г.Москва;  
*Масленников Андрей Леонидович* – старший преподаватель кафедры «Системы автоматического управления», МГТУ им. Н.Э. Баумана, г.Москва.