

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ДВУМЕРНЫХ, ПОРИСТЫХ ТЕЛ

Гулгезли А.С.¹, Эфендиев О.Я.²

¹*Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности,*

²*Азербайджанский государственный архитектурно-строительный университет,
г.Баку*

Ключевые слова: пора, тонкостенность, геометрическая нелинейность, уравнения равновесия, напряжение, деформация, вариация, функционал.

Аннотация. Во многих отраслях техники и производства применяются тонкостенные конструкции. В случаях фильтрации, теплоизоляции, поглощении звука и т.д. применяются тонкостенные конструкции. При применении тонкостенных конструкций имеют место конечные деформации, поэтому возникает необходимость учета геометрической нелинейности. Для решения таких нелинейных задач удобен вариационный метод. В данной работе предложен функционал, Эйлеровы уравнения которого являются уравнениями состояния с учетом действия пор на механические характеристики материала, уравнениями равновесия с учетом геометрической нелинейности и граничными условиями тонкой оболочки в скоростях.

THE VARIATIONAL PRINCIPLE FOR DETERMINING THE STRESS-STRAIN STATE OF TWO-DIMENSIONAL, POROUS BODIES

Gulgezli A.S.¹, Afandiyev O.Ya.²

¹*Azerbaijani State University of Oil and Industry,*

²*Azerbaijani State Architectural and Construction University, Baku*

Keywords: pore, thin-walled, geometric nonlinearity, equilibrium equations, stress, deformation, variation, functional.

Abstract. In many branches of technology and production thin-walled constructions are used. In cases of filtration, thermal insulation, sound attenuation, etc. thin-walled, porous structures are used. When thin-walled structures are used, finite deformations take place, therefore, it becomes necessary to take into account geometric nonlinearity. To solve such nonlinear problems, the variational method is convenient. In this paper, we propose a functional whose Euler equations are equations of state taking into account the action of pores on the mechanical characteristics of the material, equilibrium equations taking into account geometric nonlinearity and the boundary conditions of a thin shell in velocities.

В отраслях атомной энергетики, ракетной и космической техники широко применяются тонкостенные конструкции из пористого материала. В тонкостенных конструкциях имеют место большие перемещения и приходится уметь. Решение нелинейных задач связано с большими математическими трудностями, поэтому следует применять один из приближенных методов математики. Вариационный метод является одним из таких методов. Ввиду этого, строим функционал для изучения напряженно-деформированного состояния тонких оболочек и пластинок с учетом действия пор на механические характеристики материала и больших относительных перемещений.

Из теории тонких оболочек и пластинок известно, что компоненты деформации и напряжения любой точки оболочки с точностью z^2 (z -координата вдоль нормали к срединной поверхности), выражаются в виде [1]

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} + z\kappa_{ij}, & \tilde{\varepsilon}_{i3} = \varepsilon_{i3} + z\kappa_{i3}, & \tilde{\varepsilon}_{33} = \varepsilon_{33} \\ \tilde{\sigma}^{ij} = \frac{1}{2h}N^{ij} + \frac{3z}{2h^3}M^{ij}, & \tilde{\sigma}^{i3} = \frac{1}{2h}Q^i, & \tilde{\sigma}^{33} = \frac{1}{2h}Q^3 \\ \bar{u}_i = u_i + z\psi_i, & \bar{u}_3 = u_3 = w; & i, j = 1, 2 \end{cases} \quad (1)$$

где $\tilde{\varepsilon}_{ij}$, $\tilde{\varepsilon}_{i3}$, $\tilde{\varepsilon}_{33}$, -компоненты тензора деформаций в произвольной точке оболочки; ε_{ij} , ε_{i3} , ε_{33} , κ_{ij} , κ_{i3} —соответственно, компоненты тензора деформаций срединной поверхности и компоненты ее изгиба; $\tilde{\sigma}^{ij}$, $\tilde{\sigma}^{i3}$, $\tilde{\sigma}^{33}$ -компоненты напряжений в произвольной точке оболочки; $\bar{u}_i$ -компоненты вектора перемещения в произвольной точке оболочки; u_i , w —компоненты вектора перемещения на срединной поверхности; ψ_i , -сдвиги по толщине оболочки.

Компоненты тензора конечной деформации произвольной точки оболочки выражаются через компоненты вектора перемещения в виде [2].

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{2} \{ [u_{j,i} - 2b_{ij}w + u_{i,j} + (u_{,j}^k - wb_i^k) \\ &\quad (u_{k,j} - wb_{kj}) + (w_{,i} + u^k b_{ik})(w_{,j} + u^k b_{jk})] + \\ &\quad + z[\psi_{j,i} + \psi_{i,j} + (u_{,i}^k - b_{ik}^k w)\psi_{k,j} + (u_{k,j} - b_{kj}w)\psi_{,i}^k + b_j^\alpha (w_{,i} + \\ &\quad + b_{kj}u^k)\psi_\alpha + b_j^\alpha (w_{,j} + b_{jk}u^k)\psi_\alpha] \} \\ \tilde{\varepsilon}_{i3} &= \frac{1}{2} [(w_{,i} + b_{ik}u^k) + \psi_i + \psi^k (u_{k,i} - b_{ik}w) + z(b_i^k \psi_k + \psi_{k,i} \psi^k)] \\ \tilde{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{2} \psi^k \psi_k; \alpha, k, i, j, = 1, 2 \end{aligned}$$

где b_{ij} —коэффициенты второй квадратичной формы.

Здесь и дальше величины с нижними индексами являются ковариантными компонентами, с верхними индексами — контравариантными компонентами данного объекта, запятые означают ковариантное дифференцирование.

Известно, что пустых пор не бывают. Они заполнены или газами, или жидкостями. В процессе деформирования эти жидкости или газы переходя из пор с высоким давлением в поры с низкими давлениями т.е. напряженно-деформированное состояние является функцией времени. Тогда соотношение между скоростями компонентов тензора деформаций и напряжений в произвольной точке оболочки, с учетом того, что $\dot{\tilde{\sigma}}^{33} = 0$, имеет вид [3]

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \frac{1}{E} [\dot{\tilde{\sigma}}_{ij} - \nu(\dot{\tilde{\sigma}}_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{ij} - \dot{\tilde{\sigma}}_{ij})] - \frac{1}{E^2} [\dot{\tilde{\sigma}}_{ij} - \nu(\dot{\tilde{\sigma}}_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{ij} - \dot{\tilde{\sigma}}_{ij})] \dot{E} \\ \dot{\tilde{\varepsilon}}_{i3} = \frac{1+\nu}{E} \dot{\tilde{\sigma}}_{i3} - \frac{1+\nu}{E^2} \dot{\tilde{\sigma}}_{i3} \dot{E} \\ \dot{\tilde{\varepsilon}}_{33} = \frac{-\nu}{E} \dot{\tilde{\sigma}}^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{E^2} \dot{\tilde{\sigma}}^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \dot{E} \end{cases} \quad (2)$$

где E -модуль Юнга и определяется формулой [4]

$$E = \frac{m_s E_s + m_{ж} E_{ж}}{m} \quad (3)$$

Индексы s и $ж$ означают скелета и жидкости. Индексы $i, j, \alpha, \beta = 1, 2$.

Допустим на краю оболочки, содержащем в себе участок контура срединной поверхности L_σ , действуют поверхностные силы

$$T^\alpha = \frac{1}{2h} \bar{N}^\alpha + \frac{3Z}{2h^3} \bar{M}^\alpha, T^3 = \frac{1}{2h} \bar{N}^\alpha$$

$$\text{где } \bar{N}^\alpha = \int_{-h}^h T^\alpha dz, \quad \bar{M}^\alpha = \int_{-h}^h z T^\alpha dz$$

$2h$ -толщина оболочки. $\bar{N}^\alpha$ и $\bar{M}^\alpha$ имеют вид:

$$\begin{cases} \bar{N}^\alpha = N^{ij} (u_{,i}^\alpha - w b_i^\alpha + g_i^\alpha) n_j + Q^j \psi^\alpha n_j + M^{ij} b_{ik} \psi^k n_j \\ \bar{N}^3 = N^{ij} (w_{,i} + b_{ik} u^k) n_j + Q^j n_j + M^{ij} b_{ik} \psi^k n_j \\ \bar{M}^\alpha = M^{ij} (u_{,i}^\alpha - w b_i^\alpha + g_i^\alpha) n_j; \quad \alpha = 1, 2 \end{cases} \quad (4)$$

где n_j -компоненты вектора нормали контура ($i = 1, 2$),

$$N^{ij} = \int_{-h}^h \tilde{\sigma}^{ij} dz, \quad M^{ij} = \int_{-h}^h z \tilde{\sigma}^{ij} dz, \quad Q^i = \int_{-h}^h T^\alpha dz \quad (5)$$

На оставшиеся части контура L_u заданы перемещения $\tilde{u}_i = u_i + z\psi_i$; $w = \bar{w}$. Считается, что процесс во времени проходит достаточно медленно, так что рассматриваемую задачу можно считать квазистатической и поэтому будем пренебрегать кинетической энергией.

Предлагаемый функционал имеет вид

$$\begin{aligned} J = \int_s \left\{ \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{N}^{ij} + \dot{\chi}_{ij} \dot{M}^{ij} + 2\dot{Q}^i \dot{\varepsilon}_{i3} + \frac{1}{2} [N^{ij} (\dot{u}_{\alpha,i} - w b_{i\alpha}) \times \right. \\ \times (\dot{u}_{\alpha,j} - \dot{w} b_{j\alpha}) + M^{ij} ((\dot{u}_{\alpha,i} - \dot{w} b_{i\alpha}) \dot{\psi}_{\alpha,j} + (\dot{u}_{\alpha,j} - \dot{w} b_{j\alpha}) \dot{\psi}_{\alpha,i})] + \\ + (\dot{u}_{\alpha,j} - \dot{w} b_{j\alpha}) \dot{\psi}_{\alpha,i} \Big] + \frac{1}{2} [N^{ij} (\dot{u}_{\alpha} b_{i\alpha} + \dot{w}_{,i}) (\dot{u}_{\alpha} b_{j\alpha} + \dot{w}_{,j}) + \\ + M^{ij} ((\dot{u}_{\alpha} b_{i\alpha} + \dot{w}_{,i}) \dot{\psi}_{\alpha} b_{j\alpha} + (\dot{u}_{\alpha} b_{j\alpha} + \dot{w}_{,j}) \dot{\psi}_{\alpha} b_{i\alpha})] + \\ + \dot{\psi}^\alpha (\dot{u}_{\alpha,i} - \dot{w} b_{i\alpha}) Q^i - \left[\frac{p_0}{4hE_0} (\dot{N}_{ij} - \nu (\dot{N}_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{ij} - \dot{N}_{ij})) \right) + \\ + \frac{3p_1}{4h^3 E_0} (\dot{M}_{ij} - \nu (\dot{M}_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{ij} - \dot{M}_{ij})) \Big] \frac{\dot{N}^{ij}}{2h} - \\ - \frac{3}{2h^3} \dot{M}^{ij} \left[\frac{p_1}{4hE_0} (\dot{N}_{ij} - \nu (\dot{N}_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{ij} - \dot{N}_{ij})) + \frac{3p_2}{4h^3 E_0} (\dot{M}_{ij} - \right. \\ \left. - \nu (\dot{M}_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{ij} - \dot{M}_{ij})) \right] + \frac{\dot{N}^{ij}}{2h} \left[\frac{q_0}{2h} (N_{ij} - \nu (N_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{ij} - N_{ij})) + \right. \\ + \frac{3q_1}{2h^3} (M_{ij} - \nu (M_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{ij} - M_{ij})) \Big] + \frac{3\dot{M}^{ij}}{2h^3} \left[\frac{q_1}{2h} (N_{ij} - \right. \\ \left. - \nu (N_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{ij} - N_{ij})) + \frac{3q_2}{2h^3} (M_{ij} - \nu (M_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{ij} - M_{ij})) \right] \Big] - \\ - \dot{Q}_x \left[\frac{1}{2} c_1 \dot{Q}_i - \dot{c}_2 Q_i \right] \Big\} ds - (\dot{N}^\alpha \dot{u}_\alpha + \dot{M}^\alpha \dot{\psi}_\alpha + \dot{N}^3 \dot{w}) d\ell \\ - \int_{L_\sigma} - \int_{L_u} [\dot{N}^\alpha (\dot{u}_\alpha - \dot{\tilde{u}}_\alpha) + \dot{M}^\alpha (\dot{\psi}_\alpha - \dot{\tilde{\psi}}_\alpha + \dot{N}^3 (\dot{w} - \dot{\tilde{w}}))] d\ell \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{где } p_i = \int_{-h}^h \frac{z^i E_0}{E} dz; \quad q_i = \int_{-h}^h \frac{z^i}{E^2} \cdot \dot{E} dz; \quad i = 0, 1, 2$$

$$c_1 = \int_{-h}^h \frac{1+\nu}{2h^2 E} dz; \quad \dot{c}_2 = \int_{-h}^h \frac{1+\nu}{2h^2 E^2} \cdot \dot{E} dz$$

Если вычислить первую вариацию функционала (6) и приравнять нулю коэффициенты при независимых вариациях $\delta \dot{N}^{ij}, \delta \dot{M}^{ij}, \delta \dot{Q}^i, \delta \dot{\varepsilon}_{ij}, \delta \dot{\chi}_{ij}, \delta \dot{\varepsilon}_{i3}, \delta \dot{u}_\alpha, \delta \dot{\psi}_\alpha, \delta \dot{w}$, так как считается, что независимо варьируются величины $\dot{u}_\alpha, \dot{\psi}_\alpha, \dot{w}, \dot{\varepsilon}_{ij}, \dot{\chi}_{ij}, \dot{\varepsilon}_{i3}, \dot{N}^{ij}, \dot{M}^{ij}, \dot{Q}^i$. после ряда преобразований, с учетом симметричности N^{ij} и M^{ij} а также применяя теорему Грина, получим уравнения Эйлера функционала (6) в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{4h^2 E_0} p_0 \left(\dot{N}_{ij} - \nu (\dot{N}_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{ij} - \dot{N}_{ij}) \right) - \frac{3}{4h^3 E_0} p_1 \left(\dot{M}_{ij} - \nu (\dot{M}_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{ij} - \dot{M}_{ij}) \right) + \\ + \frac{q_0}{4h^2} \left(N_{ij} - \nu (N_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{ij} - N_{ij}) \right) = 0 \\ \dot{\varepsilon}_{i3} - \frac{1}{2h} (c_1 \dot{Q}_i - c_2 \dot{Q}_i) = 0 \\ \dot{\chi}_{ij} \frac{3p_0}{4h^4 E_0} \left(\dot{N}_{ij} - \nu (\dot{N}_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{ij} - \dot{N}_{ij}) \right) - \frac{9p_2}{4h^6 E_0} \left(\dot{M}_{ij} - \nu (\dot{M}_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{ij} - \dot{M}_{ij}) \right) + \\ + \frac{3q_0}{4h^4} \left(N_{ij} - \nu (N_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{ij} - N_{ij}) \right) - \frac{9q_2}{4h^6} \left(M_{ij} - \nu (M_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{ij} - M_{ij}) \right) = 0 \\ \left[\left(N^{ij} (g_i^k + u_{,i}^k - w b_i^k) \right)_{,j} - N^{ij} (w_{,j} + u^\alpha b_{j\alpha}) b_i^k - M^{ij} \psi_\alpha b_i^\alpha b_j^k + \right. \\ \left. + (Q^i \psi^k)_{,i} - Q^i b_i^k \right] = 0 \\ \left[N^{ij} (u_{k,j} - w b_{kj}) b_i^k + N^{ij} b_{i\alpha} + (N^{ij} (w_{,j} + u^\alpha b_{ik}))_{,j} + (M^{ij} \Psi_{k,j}) b_i^\alpha + \right. \\ \left. + (M^{ij} \Psi_k b_i^k)_{,j} + \Psi^k Q^i b_{ik} + Q_{,j}^j \right] = 0 \\ \left[(M^{ij} (g_i^k + u_{,i}^k - b_i^k w))_{,j} - M^{ij} (w_{,j} + b_{i\alpha} u^\alpha) b_i^\alpha + Q^i (g_i^k + u_{,i}^k - \right. \\ \left. - b_i^k w) \right] = 0 \\ \begin{cases} [N^{ij} (g_i^k + u_{,i}^k - b_i^k w) n_j + M^{ij} \psi_{,i}^k n_j + Q^i \psi^k n_j] = \dot{N}^k \\ [M^{ij} (g_i^k + u_{,i}^k - b_i^k w) n_j] = \dot{M}^k \\ [N^{ij} (w_{,i} + u^\alpha b_{ik}) n_j + b_i^k \psi_k M^{ij} n_j + Q^i n_j] = \dot{N}^3 \end{cases} \quad \text{на } S_\sigma \\ \begin{cases} \dot{u}_\alpha - \dot{\bar{u}}_\alpha = 0 \\ \dot{\psi}_\alpha - \dot{\bar{\psi}}_\alpha = 0 \\ \dot{w} - \dot{\bar{w}} = 0 \end{cases} \quad \text{на } S_u \end{aligned}$$

Полученные системы уравнений соответственно, являются уравнениями состояния с учетом действия пор на механические характеристики материала, уравнениями равновесия с учетом геометрической нелинейности и граничными условиями тонкой оболочки в скоростях.

Таким образом, мы показали, что стационар предложенного функционала достигается на функциях, описывающих напряженно-деформированное состояние тонкой оболочки с учетом действия пор на механические характеристики материала и больших относительных перемещений.

Список литературы

1. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. – М.: Наука, 1978.
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 420 с.
3. Gulgezli A., Efendiev O. Variation principle for determining the stress-strain state of porous bodies // International journal of current research. 2017, Vol. 9, Issue 10, pp. 59603-59607.
4. Гулгазли А.С. Рагимов А.М, Гусейнова В.Ш. Исследование изменения механических характеристик полимеров, насыщенных жидкостью // Труды Научно-исследовательского Института Геотехнологических проблем нефти и газа. Том X. – Баку, 2009. – С. 300-303.

Сведения об авторах:

Гулгезли Алескер Сабир оглы – д.т.н., профессор кафедры «механика», АГУНП, г.Баку;

Эфендиев Орхан Яшар оглы – аспирант кафедры «механика», АЗУАС, г. Баку.