

ОЛИМПИАДА «ЛОМОНОСОВ» ПО МЕХАНИКЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ КАК СРЕДСТВО ПРИВЛЕЧЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ К НАУКЕ

Зеленский А.С., Юмашев М.В.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г.Москва

Ключевые слова: механика, задачи по механике для школьников, олимпиада «Ломоносов».

Аннотация. Дается краткая информация о специальности «механика» на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова и об олимпиаде МГУ «Ломоносов» по механике и математическому моделированию. Анализируются особенности задач олимпиады, позволяющие использовать их для привлечения школьников к будущим занятиям механикой. Приведены некоторые задачи этой олимпиады разных лет.

OLYMPIAD "LOMONOSOV" IN MECHANICS AND MATHEMATICAL MODELING AS A MEANS OF ATTRACTING SCHOOL STUDENTS TO SCIENCE

Zelenskiy A.S., Yumashev M.V.

Lomonosov Moscow States University, Moscow

Keywords: mechanics, problems in mechanics for school students, Lomonosov Olympiad.

Abstract. Brief information about the specialty "mechanics" at the Faculty of Mechanics and Mathematics of Lomonosov Moscow State University and the MSU Olympiad "Lomonosov" in mechanics and mathematical modeling is given. The features of the olympiad problems, which allow them to be used to attract school students to future studies in mechanics, are analyzed. Some problems of this Olympiad of different years are given.

Во многих ведущих классических университетах России – Московском, Санкт-Петербургском, Казанском, Уральском и других – нет математических факультетов. Но есть механико-математические или математико-механические. С точки зрения университетов механика оказывается ближе к математике, чем к физике, что вызывает большие вопросы у будущих абитуриентов. Когда школьник слышит слова «математика», «физика», «химия», он понимает, о чем речь. С «механикой» иначе. На производстве есть должности главного механика и инженера-механика. Машины ремонтируют тоже механики. Школьникам знакома механика, как раздел физики, посвященный движению тел под действием гравитационных сил, упругих сил и сил трения.

Механик университетского профиля, в отличие от механика-инженера, создает математические модели и ставит сложные математические задачи, связанные с различными механическими явлениями, а также разрабатывает общие методы их решения. Для современной механики характерно широкое привлечение самого разнообразного математического аппарата. А такие направления, как теория устойчивости, теория нелинейных колебаний, методы анализа движения систем, выходят на такой уровень, что уже трудно сказать – механика это или математика. Именно этим объясняется совместная подготовка

специалистов по механике и математике на одном механико-математическом факультете, а также то, что подготовка по математике студентов-механиков, проводится в таком же объеме, как и студентов-математиков. Заметим, что слово «механика» происходит от греческого μηχανικός – изобретательный. Можно поэтому сказать, что механик – умелый, изобретательный математик. Известен афоризм: «Математик делает то, что можно, и так, как нужно. Механик делает то, что нужно, и так, как можно»...

Многие абитуриенты поступают на специальность «механика», особо не понимая, что это, руководствуясь какими-то отрывочными сведениями. Именно поэтому началась работа со школьниками для стимулирования их творческой активности и для мотивации к будущей научной деятельности. Одним из результатов этой работы около 20 лет назад стала организация на факультете олимпиады по механике и математическому моделированию для школьников, которая 2008 года стала составной частью олимпиады МГУ «Ломоносов».

Когда студенты университета начинают осваивать специализацию и решать соответствующие задачи, они сталкиваются обычно либо с необходимостью получать и затем исследовать те или иные дифференциальные уравнения, либо использовать аппарат теории функций комплексного переменного, либо другие разделы высшей математики. Однако для того, чтобы получить самое первое представление о механике, можно обойтись и знаниями в объеме школьной программы. Мы считаем, что очень полезным как для общего развития будущего ученого-механика, так и для его дальнейшей профориентации, является решение соответствующих задач по механике [1, 2].

Олимпиада по механике и математическому моделированию может помочь школьникам понять суть механики как науки, получить представление о направлении приложения своих интеллектуальных сил. Именно поэтому участникам данной олимпиады предлагаются прежде всего такие задачи, которые позволяют выявить особое «механическое чутье», показывают глубинную связь самых разнообразных разделов науки. После того, как задача математически сформулирована, ее решение потребует владения всем арсеналом математических знаний, доступных школьникам соответствующих классов. Многие задачи механических олимпиад могут показаться сложными, но решать трудные задачи и получать от этого удовольствие – наверное, единственный путь развития творческих способностей в точных науках.

Рассмотрим, например, следующую задачу [1, 2].

Задача 1. Шарик массой $m = 10$ г падает с большой высоты без начальной скорости. Численное значение силы сопротивления среды в ньютонах определяется формулой $|F| = 10^{-3}V^2$, где V – значение модуля скорости тела в метрах в секунду. Вычислите приблизительно, за какое время шарик пройдет первый сантиметр и первый километр пути? Принимаемые предположения обоснуйте.

Для «математика» решить данную задачу – это значит выписать и решить обыкновенное дифференциальное уравнение, что вполне возможно, но требует довольно богатого математического аппарата (не менее двух курсов мехмата). В то же время «механик» может предложить следующее решение.

Предположим, что на первом сантиметре пути сила сопротивления не существенна. Действительно, если бы ее совсем не было, то шарик приобрел бы скорость $V = \sqrt{2gh} \approx 0,45$ м/с (через h обозначен 1 сантиметр). При такой скорости сила сопротивления составляет $F = 2 \cdot 10^{-4}$ Н, что в 500 раз меньше силы тяжести. Таким образом, пользуясь формулой для скорости тела при свободном падении, получаем приближенно время, за которое шарик пролетит первый сантиметр: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 0,045$ с.

С увеличением скорости растет сила сопротивления движению. Существует скорость V_1 , с которой шарик может двигаться равномерно. Найдем ее: $Mg = F \Rightarrow V_1 = 10$ м/с. Такой скорости свободно падающее тело достигнет за одну секунду. То есть, за 1 с тело разгоняется почти до скорости V_1 , и затем движется практически равномерно. Двигаясь со скоростью V_1 , шарик пройдет один километр за 100 с. Время разгона много меньше этой величины, поэтому 100 секунд можно считать ответом.

Имеются также задачи, которые очень полезны для выявления глубоких межпредметных связей. Такова, например, следующая задача.

Задача 2. Теплоход стоит на рейде на расстоянии 200 м от прямолинейного берега и готовится к отплытию. Находящийся на расстоянии 1400 м от теплохода опаздывающий пассажир бежит по берегу вдоль набережной. Через какое минимально возможное время пассажир может добраться до теплохода, если он плавает со скоростью 4 км/час, а по суше передвигается вдвое быстрее? [1, 2]

В этой задаче можно обнаружить много способов решения [3]:

а) несколько алгебраических способов, основанных на получении функции времени и нахождении минимума этой функции с помощью производной. Важно показать, как выбор неизвестной влияет на эффективность решения и на возможность качественного анализа получаемого ответа;

б) алгебраическое решение, в котором нахождение минимума функции времени производится без применения производной;

в) геометрическое решение, основанное на классической задаче о нахождении точки внутри треугольника, для которой сумма расстояний до трех вершин является минимальной (точка Ферма-Торричелли-Штейнера);

г) очень элегантное геометрическое решение, основанное на поиске минимума длины ломаной;

д) физическое решение, основанное на законах преломления света.

Важно проанализировать достоинства и недостатки каждого из этих способов и их взаимосвязи друг с другом. Очень интересен вопрос о том, каким образом подтолкнуть ученика к нахождению того или иного решения.

Приведем примеры других задач олимпиады.

Задача 3. Белый медведь вышел из точки А, прошел 3 км на север, потом 3 км на восток, потом 3 км на юг и оказался снова в точке А. Другой белый медведь вышел из точки Б, прошел 5 км на север, потом 5 км на запад, потом 5 км на юг и оказался снова в точке Б. Найдите максимально возможное расстояние

между точками A и B , если допустить, что Земля имеет форму шара радиусом 6370 км и что описанные события произошли севернее экватора.

Решение задачи 3. Возможная точка старта на Южном полюсе отвергается последним условием. Также невозможно стартовать на 3 км (или соответственно на 5 км) южнее Северного полюса, так как на полюсе движение на восток или запад невозможно.

Единственная возможность для первого медведя: стартовать чуть дальше, чем за 3 км до Северного полюса, затем совершить один или несколько полных кругов вокруг полюса суммарной длиной 3 км и вернуться в исходную точку.

Если делается ровно n кругов, то $n \cdot 2\pi r = 3$, то есть радиус круга равен $r = \frac{3}{2\pi n}$. При этом (см. рис. 1) $BC = r$, $AB = 3$. Получается $\sin \alpha = \frac{r}{R}$, где R – радиус Земли. Значит, расстояние от окружности до полюса BP равно $R\alpha = R \cdot \arcsin\left(\frac{r}{R}\right)$, а расстояние от точки A до полюса: $3 + R \cdot \arcsin\left(\frac{3}{2\pi n R}\right)$.

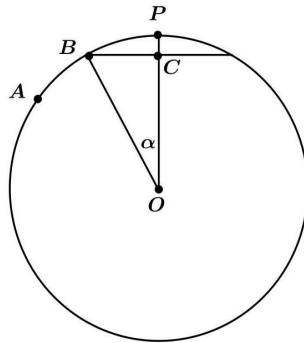


Рис. 1.

Аналогично точка старта второго медведя находится от Северного полюса на расстоянии $5 + R \cdot \arcsin\left(\frac{5}{2\pi k R}\right)$ (где k – количество кругов).

Расстояние AB будем максимальным, если медведи приходят к полюсу с разных сторон и при этом $n = k = 1$. Тогда $AB = 3 + R \cdot \arcsin\left(\frac{3}{2\pi R}\right) + 5 + R \cdot \arcsin\left(\frac{5}{2\pi R}\right) = 8 + R \cdot \left(\arcsin\left(\frac{3}{2\pi R}\right) + \arcsin\left(\frac{5}{2\pi R}\right)\right)$.

Так как при малых α имеет место равенство $\sin \alpha \approx \alpha$, то получаем приближенное значение $AB \approx 8 + R \cdot \left(\frac{3}{2\pi R} + \frac{5}{2\pi R}\right) \approx 8 + \frac{4}{\pi} \approx 9,3$ км. Заметим, что здесь $\sin \alpha$ имеет порядок $\frac{2}{\pi R} < 10^{-4}$. Поэтому ошибка составлять будет меньше миллиметра (второй член разложения в ряд имеет порядок куба аргумента, то есть 10^{-12}).

Задача 4. Сосуд имеет форму прямоугольного параллелепипеда, заполнен газом при комнатной температуре $t_0 = 27^\circ\text{C}$ и атмосферном давлении $P_0 = 10^5$ Па.

Он жестко укреплен на полу. Внизу сосуда есть отверстие в форме квадрата со стороной $a = 10$ см, стороны которого вертикальны и горизонтальны. Брусок, лежащий на полу и совпадающий с отверстием по форме и размерам, плотно закрывает сосуд (см. рис. 2; вид сбоку). Масса бруска $m = 10$ кг, толщина $d = 4$ см. На сколько градусов Δt необходимо изменить температуру газа, чтобы брусок начал двигаться наружу? Коэффициент трения между бруском и полом равен $\mu = 0,3$.

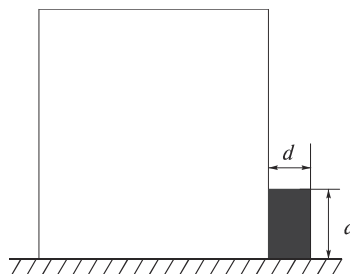


Рис. 2.

Решение задачи 4. При увеличении температуры давление будет увеличиваться по закону Шарля $P = P_0 \frac{T}{T_0}$, откуда найдем связь приращения температуры Δt с приращением давления ΔP : $\Delta t = \frac{T_0 \Delta P}{P_0}$. Дополнительное давление ΔP создает силу давления $F_p = \Delta P a^2$. Если сила давления сравняется с силой трения скольжения $F_f = mg\mu = 30$ Н, то брусок начнет двигаться.

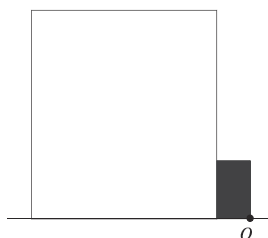


Рис. 3.

Если сила давления будет меньше, чем 30 Н, то брусок не сдвинется, но может перевернуться. Возможность переворота определяется равенством моментов рассматриваемых сил во вращении вокруг точки O (см. рис. 3): $F_p \frac{a}{2} = \frac{mgd}{2}$. Отсюда получим $F_p = \frac{mgd}{a} = 40$ Н. Так как $F_p > F_f$, то брусок не может перевернуться при силе давления меньше, чем 30 Н. Это значит, что он начнет скользить при $F_p = F_f = 30$ Н. Тогда получаем ответ: $\Delta t = 9^\circ \text{C}$.

Задача 5. Шар радиуса $R = 0,3$ м поднимается под действием силы Архимеда с большой глубины, испытывая сопротивление воды, пропорциональное скорости V движения шара $F = k\rho_0\pi R^2 V$, где ρ_0 – плотность воды, $k = 0,2$ м/с – постоянная величина. Найти минимальную высоту над поверхностью воды, на которую не может подняться шар, выпрыгнув из воды, с какой бы большой глубины он не начал свое движение. Считать, что

сопротивление воздуха пренебрежимо мало, ускорение свободного падения равно $g = 10 \text{ м/с}^2$, а отношение плотности материала шара ρ к плотности воды известно $\rho/\rho_0 = 0,5$.

Решение задачи 5. Пока шар находится в воде, на него действует три силы: сила тяжести $F_g = \frac{3}{4\pi R^3 \rho_0 g}$; сила Архимеда $F_a = \frac{3}{4\pi R^3 \rho g}$; сила сопротивления

$F_r = k\pi R^2 \rho_0 V$. В начале движения сила сопротивления практически равна нулю, и тело начинает всплывать с ускорением и продолжает ускоряться до тех пор, пока не выполнится условие $F_a - F_g - F_r = 0$. Отсюда найдем скорость установившегося движения $V = \frac{4R(\rho_0 - \rho)g}{3k\rho_0} = 10 \text{ м/с}$. Теперь найдем высоту

максимального подъема $H = \frac{V^2}{2g} = 5 \text{ м}$. Следует заметить, что высота 5 метров

практически недостижима, так как скорость движения тела стремится к скорости установившегося движения асимптотически, то есть для её достижения требуется бесконечное время. Поэтому ответ на вопрос задачи: 5 м.

Список литературы

1. Введение в специальность: Механика. Сборник задач / Сост. А.С. Зеленский, Е.И. Могилевский, М.В. Юмашев. Под общ. ред. Н.Н. Смирнова. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2013. – 72 с.
2. Юмашев М.В., Зеленский А.С., Могилевский Е.И. Олимпиады «Ломоносов» по механике для школьников 7–11 классов. Задачи и решения. – М.: Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, 2010. – 92 с.
3. Zelenskiy A.S. The Process of Teaching Mathematics by the Use of Non-traditional Formulations of Problems and by Use of Problems with Erroneous Decision // 2nd International STEM in Education Conference. Beijing, 2012. P. 100-107 [stem2012.bnu.edu.cn/data/long paper/stem2012_53.pdf].

Сведения об авторах:

Зеленский Александр Степанович – к.ф.-м.н., с.н.с. механико-математического факультета, МГУ им. М. В. Ломоносова, г.Москва;

Юмашев Михаил Владиславович – к.ф.-м.н., доцент механико-математического факультета, МГУ им. М. В. Ломоносова, г.Москва.