

СНИЖЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ПРИНУЖДЕНИЯ ПРИ ЭКВИВАЛЕНТНОМ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ДВИЖЕНИЕМ ОБЪЕКТА

Бохонский А.И.¹, Варминская Н.И.², Рыжков А.И.¹

¹Севастопольский государственный университет, Севастополь, Россия;

²Черноморское высшее военно-морское училище имени П.С. Нахимова,
Севастополь, Россия

Ключевые слова: конструирование управления, энергоёмкость управления, условия эквивалентности управлений.

Аннотация. Конструируемому оптимальному управлению (ускорению) соответствует эквивалентное по энергоёмкости управление, обеспечивающее достижение цели движения. В данном случае фактически реализуется принцип наименьшего энергетического принуждения при быстром движении из исходного в конечное состояние покоя; если система упругая (конечной жесткости), то возможно достижение абсолютного покоя.

ENERGY FORCING REDUCTION UNDER EQUIVALENT OPTIMUM CONTROL OF OBJECT MOTION

Bokhonsky A.I.¹, Varminskaya N.I.², Ryzhkov A.I.¹

¹Sevastopol State University, Sevastopol, Russia;

²Nakhimov Black Sea Higher Naval School, Sevastopol, Russia

Keywords: control design, control energy consumption, control equivalence conditions.

Abstract. The designed optimal control (acceleration) corresponds to a control equivalent in terms of energy consumption, which ensures the achievement of the goal of movement. In this case, the principle of the least energy coercion is actually implemented with rapid movement from the original to the final state of rest; If the system is elastic (final stiffness), then the absolute rest is possible.

В современной технике при повышении производительности оборудования (в робототехнике, например) применение управлений, обеспечивающих достижение в конечном состоянии абсолютного либо относительно покоя объектов, обеспечивает повышение эффективности технологических процессов. При конструировании оптимального управления (без предварительного задания критерия оптимальности) для произвольной степени полинома и движении из состояния покоя [1-5] управление описывается универсальной зависимостью:

$$U_e = \frac{2L(n+2)}{T^2} \left(\frac{T-2t}{T} \right)^n, \quad V_e = \frac{L(n+2)}{T(n+1)} \left(1 - \left(\frac{T-2t}{T} \right)^{n+1} \right),$$

$$S_e = \frac{L}{2(n+1)} \left(\left(\frac{T-2t}{T} \right)^{n+2} + \frac{2nt}{T} + \frac{4t}{T} - 1 \right), \quad (1)$$

где L – максимальное перемещение, T – время движения. Классическое управление при $n = 1$ следует из (1) как частный случай:

$$\begin{aligned}
 U(t) &= \frac{6L(n+2)}{T^2} \left(\frac{T-2t}{T} \right), \quad V(t) = \frac{3L}{2T} \left(1 - \left(\frac{T-2t}{T} \right)^2 \right), \\
 S(t) &= \frac{L}{4} \left(\left(\frac{T-2t}{T} \right)^3 + \frac{6t}{T} - 1 \right).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Например, при исходных данных $L = 6$ м, $T = 2$ с, $m = 1$ кг, $n = 1$ энергия управления равна:

$$A_1 = 2 \int_0^{T/2} U(t)V(t)dt = 20,25 \text{ Дж.}$$

В качестве примера дальше использовано управление с $n = 5$, которому соответствуют зависимости:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{14L}{T^2} \left(\frac{T-2t}{T} \right)^5, \quad V_1 = \frac{7L}{6T} \left(1 - \left(\frac{T-2t}{T} \right)^6 \right), \\
 S_1 &= \frac{L}{12} \left(\left(\frac{T-2t}{T} \right)^7 + \frac{14t}{T} - 1 \right).
 \end{aligned} \tag{3}$$

В этом случае энергия $A = 2 \int_0^{T/2} U_1 V_1 dt = 12,25$ Дж.

При $L = 1$ м, $T = 1$ с, $m = 1$ кг и $n \rightarrow \infty$ графики оптимального движения стремятся к своему предельному значению. На рисунке 1 изображены графики движения ($n = 1375$). Ускорение стремится к двум импульсам (разгон и торможение), а скорость в интервале между действующими импульсами стремится к константе. В этом примере энергия для реализации движения принимает следующее минимальное значение:

$$A_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \int_0^{T/2} m U_e(t) V_e(t) dt = 1 \text{ Дж.}$$

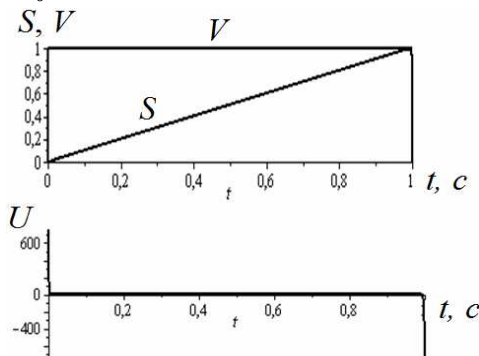


Рис. 1. Графики перемещения, скорости и ускорения (при $n = 1375$)

Ускорение (управление) в предельном случае может быть описано с использованием δ -функции Дирака $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)dt = 1$; δ -функцию можно приближенно заменить прямоугольным либо синусоидальным импульсом. Такие оптимальные управления остаются эквивалентными по энергоемкости.

Эквивалентное синусоидальное управление

Импульсы эквивалентного управления приняты в виде:

$$U_3(t) = B \sin\left(\frac{\pi}{\tau} t\right), \quad \tau > t \geq 0, \quad U_3(t) = -B \sin\left(\frac{\pi}{\tau} t\right), \quad T > t \geq T - \tau, \quad (4)$$

где B , τ – константы, подлежащие определению из условий эквивалентности управлений. Из (4) следуют выражения для скорости и перемещения (рис. 2)

$$V_3(t) = \frac{B\tau}{\pi} \left(L - \cos\left(\frac{\pi}{\tau} t\right) \right), \quad S_3(t) = \frac{B\tau}{\pi} \left(t - \frac{\tau}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{\tau} t\right) \right). \quad (5)$$

Применены условия:

1. Импульс эквивалентного управления равен импульсу эталонного (при $n = 5$):

$$\int_0^{T/2} U_1(t) dt = \int_0^{\tau} U_3(t) dt, \quad \text{т.е.} \quad 2 \frac{B\tau}{\pi} - \frac{7L}{T} = 0. \quad (6)$$

2. Перемещение за время $T/2$ должно соответствовать перемещению при эталонном управлении, т.е. $S(T/2) = L/2$,

$$\frac{1}{2} B\tau^2 + 2 \frac{B\tau}{\pi} \left(\frac{T}{2} - \tau \right) - \frac{L}{2} = 0. \quad (7)$$

При $L = 6$ м, $T = 2$ с из системы уравнений (6), (7) получено: $B = 8,2588$ м/с²; $\tau = 0,6657$ с. В этом случае энергия:

$$A_3 = 2 \int_0^{T/2} U_3 V_3 dt = 12,25 \text{ Дж.}$$

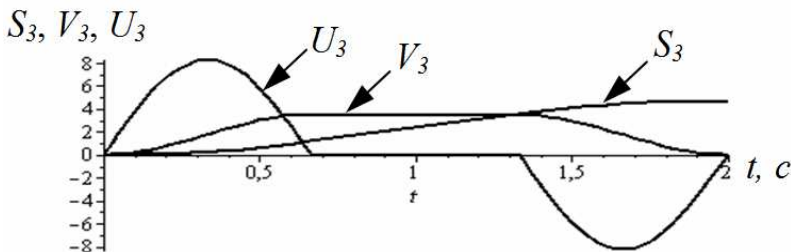


Рис. 2. Графики эквивалентного управления (синусоидальные импульсы)

Замена реверсионно найденных оптимальных управлений движением объектов эквивалентными по энергоемкости облегчает их практическое использование в различных областях техники. Энергоемкость полученных таким образом оптимальных управлений сравнивалась с энергией классического управления, которое, как известно, находится вариационным методом теории оптимального управления. Сомнение в полученном результате устранено проверками, включая использования меры минимального энергетического принуждения в виде функционала:

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^T [U_e(t) - U_1(t)]^2 dt \quad (8)$$

с проверкой выполнения дополнительного неравенства

$$\int_0^{T/2} U_e(t) \cdot V_e(t) dt < \int_0^{T/2} U_1(t) \cdot V_1(t) dt, \quad (9)$$

где $U_1(t)$, $V_1(t)$ – ускорение и скорость при классическом управлении; $U_e(t)$, $V_e(t)$ – ускорение и скорость сконструированного управления. В качестве примера конструирования для перемещения принят полином:

$$S_e(t) = \sum_{i=1}^7 C_i \cdot t^{i+1}. \quad (10)$$

С целью упрощения алгоритма часть констант предварительно найдена с учетом краевых условий и косой симметрии управления:

$$S_e(0) = 0, V_e(0) = 0; S_e(T) = L, V_e(T) = 0;$$

$$\dot{U}_e(T/2) = 0, \ddot{U}_e(T/2) = 0, \ddot{U}_e(T/2) = 0.$$

Дополнительно использованы необходимые условия экстремума меры энергетического принуждения (8): $\frac{\partial E_p}{\partial C_y} = 0, \frac{\partial L_p}{\partial C_s} = 0$.

Отметим также, что решение данной задачи вариационным методом теперь становится возможным с использованием уже нового (ранее неизвестного) критерия оптимальности $J = \int_0^T [\ddot{U}_e(t)]^2 dt$, $\ddot{U}_e(t) = \frac{d^3 U_e}{dt^3}$, для

которого уравнение Эйлера $\frac{d^6 U_e}{dt^6} = 0$ или $\frac{d^8 S_e}{dt^8} = 0$.

С ростом степени полинома управление (ускорение) стремится к двум импульсам в виде δ -функции разгона и торможения, а скорость практически на подавляющем временном интервале движения стремится к константе.

Итак, при задании времени движения и расстояния управляемый объект перемещается с минимальной энергоемкостью, однако на практике возникает необходимость в реализации импульсов разгона и торможения.

Жесткая привязка к заранее задаваемому критерию оптимальности (в вариационном методе поиска управления) сковывает воображение, ограничивая свободу выбора средств достижения поставленной цели. Вместе с тем, критерий типа «нормы мощности» $\int_0^T U^2 dt$ не обладает строгим физическим смыслом, но дает простое аналитическое решение, которое, однако, можно получить и без критерия.

Исходный энергетический функционал или критерий оптимальности $J = 2 \int_0^{T/2} UV dt$ приводит к трудоемким аналитическим преобразованиям даже при использовании современных пакетов компьютерной алгебры.

При оптимальном конструируемом движении (разгон-торможение) реализуется принцип наименьшего энергетического принуждения (НЭП) для

достижения цели – из исходного состояния покоя в конечное состояние покоя (при заданном расстоянии и времени). Исследования представляют собой обобщение классической задачи Лагранжа поиска управления при заданном времени движения и расстоянии.

Энергоемкость управляемого движения

Абсолютный покой *упругого* объекта в конце движения достигается как сумма переносного и относительного. Важно отметить, с ростом параметра n фактически в оптимальном движении появляются импульсы разгона и торможения, а внутри интервала движение практически равномерное; полученные графики (рисунок 3) свидетельствуют об этом. Корректность результата подтверждает и стремление действия по Мопертьюи – Лагранжу к предельному значению при росте степени полинома.

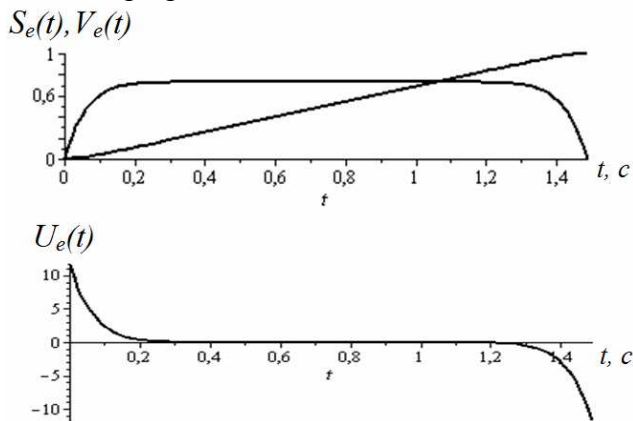


Рис. 3. Графики $S_e(t)$, $V_e(t)$, $U_e(t)$ при ($n = 11$)

Реализован алгоритм конструирования оптимального управления движением объекта, включающий этапы: а) задание цели движения в виде краевых условий – из исходного состояния покоя при перемещении на заданное расстояние с заданным временем в новое состояние покоя; б) использование условий косо́й симметрии управления; в) задание полинома; г) определение констант и факторизация полиномов для ускорения, скорости и перемещения, восстановление уравнения Эйлера и соответствующего ему функционала-критерия.

Для заданного расстояния и времени оптимального движения объекта из исходного покоя в конечный покой (разгон с торможением) цель движения достижима с предельной минимальной затратой энергии. В природе существует широкий класс управлений, которые, по сравнению с известными, приводят к экономии энергии и могут быть аппроксимированы для удобства их практической реализации.

Пример. Согласно алгоритму РПО (восстановление функционала по заданной аналитической функции) перемещение принято в виде полинома:

$$S_e(t) = \sum_{i=1}^4 C_i t^{i+1} = C_1 t^2 + C_2 t^3 + C_3 t^4 + C_4 t^5, \quad (11)$$

где $C_1..C_4$ находятся с учетом краевых условий и косо́й симметрии управления. Полиному (11) автоматически удовлетворяют условия $S_e(0)=0$, $V_e(0)=0$. Для определения констант $C_1..C_4$ использованы условия:

$$S_e(T)=L, V_e(T)=0; U_e\left(\frac{T}{2}\right)=0; \frac{dU_e}{dt}\left(\frac{T}{2}\right)=0. \quad (12)$$

С учетом факторизации полинома (11) получены выражения для $S_e(t)$, $V_e(t)$, $U_e(t)$. Полином является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^4 U_e}{dt^4} = 0 \text{ или } \frac{d^6 S_e}{dt^6} = 0. \quad (13)$$

Уравнению Эйлера (13) соответствует функционал-критерий

$$J = \int_0^T [\ddot{U}_e]^2 dt. \quad (14)$$

Графики $U_e(t)$, $V_e(t)$, $S_e(t)$ для случая $n=3$ изображены на рисунке 4.

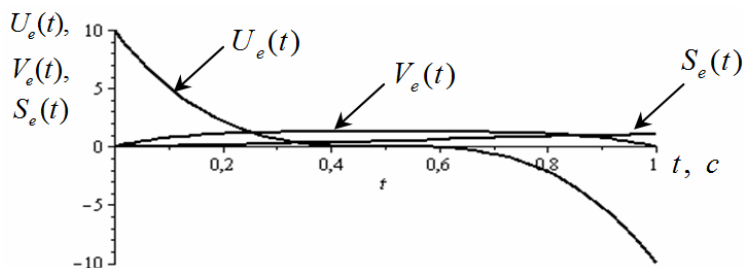


Рис. 4. Ускорение, скорость и перемещение (при $n=3$)

Если в случае $n=1$ при решении задачи вариационным методом был принят известный критерий $\int_0^T U^2 dt$, то в случае $n=3$ критерием является

$$\int_0^T [\ddot{U}_e]^2 dt.$$

При реверсионном конструировании выполняются условия достаточности экстремума функционала-критерия (согласно Якоби, Вейерштрасса и Лежандра [3, 4]), а также подтверждается его минимум в результате построения графического образа. Конструирование кососимметричных ускорений расширило использование классической задачи Лагранжа с закреплёнными концами траектории и фиксированным временем.

Достоверность результатов подтверждается не только снижением численного значения действия (по Ж.Л. Лагранжу) с ростом степени полинома, но и тенденцией снижения меры энергоёмкости принуждения для реализации управляемого движения. Принцип наименьшего энергетического принуждения (ПНЭП) для движения объекта отражает тенденцию существенного снижения энергии оптимального движения по мере роста степени полинома ускорения.

Список литературы

1. Bokhonsky A.I. Modelling and analysis of elastic system in motion / A.I. Bokhonsky, S.Y. Zolkiewski. – Gliwice: Wydawnictwo Politechniki, 2011. – 171 p.
2. Бохонский А.И. Реверсионный принцип оптимальности: монография. – М.: Вузовский учебник, ИНФРА-М, 2016. – 174 с.
3. Бохонский А.И., Варминская Н.И. Конструирование оптимальных управлений перемещением упругих объектов. – Санкт-Петербург: НИЦ МС, 2020. – 120 с.
4. Бохонский А.И. Механика управляемого движения объектов: учебное пособие / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская, Т.В. Мозолевская. – М.: ИНФРА-М, 2021. – 170 с.
5. Бохонский А.И. Энергоемкость управления перемещением объектов // Фундаментальные основы механики. – 2017. – №2. – С. 38-41.

References

1. Bokhonsky A.I. Modelling and analysis of elastic system in motion / A.I. Bokhonsky, S.Y. Zolkiewski. – Gliwice: Wydawnictwo Politechniki, 2011. – 171 p.
2. Bokhonsky A.I. Reversive Principle of Optimality. – M.: Vuzovsky uchebnik: INFRA-M, 2016. – 174 p.
3. Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I. Designing of optimal controls for the elastic objects motion. – St. Petersburg: SRC MS, 2020. – 120 p.
4. Bokhonsky A.I. Mechanics of objects controlled motion / A.I. Bokhonsky, N.I. Varminskaya, T.V. Mozolevskaya. – M: INFRA-M, 2021. – 170 p.
5. Bokhonsky A.I. Energy intensity of object motion control // Fundamental foundations of mechanics. – 2017. – No. 2. – P. 38-41.

Бохонский Александр Иванович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Цифровое проектирование»	Bokhonsky Alexander Ivanovich – doctor of technical sciences, professor, professor of the digital design Department
Варминская Наталья Ивановна – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой физики и общетехнических дисциплин	Varminskaya Natalia Ivanovna – candidate of technical sciences, associate professor, head of the Department of physics and general technical disciplines
Рыжков Александр Игоревич – ассистент кафедры «Цифровое проектирование» bohon.alex@mail.ru	Ryzhkov Alexander Igorevich – assistant of the digital design Department

Received 28.04.2022