

<https://doi.org/10.26160/2572-4347-2022-16-59-66>

ДИНАМИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ СВЯЗНОСТИ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ СИЛОВОЙ ПРИРОДЫ

Елисеев А.В., Миронов А.С.

*Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск,
Россия*

Ключевые слова: механические колебательные системы, структурные математические модели, передаточная функция, динамическое гашение колебаний, динамические инварианты, интегральные характеристики, частотная функция обнуления.

Аннотация. Развивается системный подход для решения задач оценки состояний и форм динамических взаимодействий технических объектов транспортного и технологического назначения, находящихся в условиях вибрационных воздействий силовой природы. Цель исследования заключается в разработке подходов для оценки совокупности динамических особенностей механической колебательной системы с учетом коэффициента связности внешних возмущений, рассматриваемого в качестве настроечного параметра. В рамках методологии структурного математического моделирования механическим колебательным системам, используемым в качестве расчетных схем технических объектов, сопоставляются структурные схемы эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления. Для механической колебательной системы цепного типа с двумя степенями свободы разработан метод построения интегральных характеристик, отображающих совокупность динамических особенностей системы в зависимости от коэффициента связности внешних силовых возмущений.

DYNAMIC INVARIANTS OF MECHANICAL OSCILLATORY SYSTEMS TAKING INTO ACCOUNT THE CONNECTIVITY OF EXTERNAL DISTURBANCES OF A FORCEFUL NATURE

Eliseev A.V., Mironov A.S.

Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia

Keywords: mechanical oscillatory systems, structural mathematical models, transfer function, dynamic vibration damping, dynamic invariants, integral characteristics, frequency zeroing function.

Abstract. A systematic approach is being developed to solve the problems of assessing the states and forms of dynamic interactions of technical objects of transport and technological purpose. It is assumed that the system is under the influence of coherent force disturbances. The purpose of the study is to develop approaches for evaluating the totality of dynamic features of a mechanical oscillatory system. Structural schemes of dynamically equivalent automatic control systems are compared to mechanical oscillatory systems. A method for constructing integral characteristics has been developed for a chain-type mechanical oscillatory system with two degrees of freedom.

Введение. Механические колебательной системы с несколькими степенями свободы используются для моделирования транспортных и технологических объектов, работающих в условиях интенсивных вибрационных нагрузок. Речь идет о механических колебательных системах с двумя степенями свободы, совершающих малые установившиеся колебания относительно положения статического равновесия с учетом нулевых

начальных условий. Математические модели имеют вид систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Общепринятые подходы позволяют получить представления о динамических состояниях технических объектов.

Большое внимание уделяется разработке методов в рамках системного анализа и аналитического аппарата теории систем. Для решения различных задач динамики машин находит свое применение аналитический аппарат теории автоматического управления, теории графов, электромеханических аналогий.

Необходимость решения широкого круга задач динамики стимулировала поиск и разработку новых методов и средств математического моделирования. Одним из новых направлений является актуализация и разработка методов структурного математического моделирования на основе развития обобщенных подходов в оценке динамических особенностей механических колебательных систем на основе динамических инвариантов.

Использование структурных методов предполагает этапы: расчетная схема, система дифференциальных уравнений, структурная схема, передаточная функция. Представленные этапы обладают вариативностью в плане выбора координат, структурных схем, приведенных характеристик в зависимости от выбора объекта, динамическое состояние которого оценивается. В результате, амплитудно-частотные характеристики наглядно отображают частоты резонанса, динамического гашения колебаний и другие динамические особенности с учетом характера приложения связных внешних силовых возмущений. Возможности оценки, контроля и формирования динамических особенностей системы на основе коэффициента связности, рассматриваемого в качестве настроечного параметра, обладают потенциалом практической значимости в плане разработки технологии управления динамическими состояниями технических объектов транспортного и технологического назначения, находящихся в условиях вибрационного нагружения [1-10].

Вместе с тем, существующий методологический подход нуждается в расширении детализации представлений о взаимосвязях между динамическими состояниями и формами динамических взаимодействий элементов механической колебательной системы, находящейся под воздействием связных возмущений силовой природы.

Статья посвящена развитию концепции динамических инвариантов для оценки возможных совокупностей динамических состояний и форм динамических взаимодействий элементов механических колебательных систем, рассматривающей в качестве объекта исследования совокупности динамических особенностей.

I. Основные положения. Постановка задачи. Рассматривается механическая колебательная система с двумя степенями свободы (рис. 1). Массоинерционные элементы m_1 , m_2 крепятся друг к другу и к опорным поверхностям с помощью упругих элементов с жесткостями k_1 , k_2 , k_3 (рис. 1а).

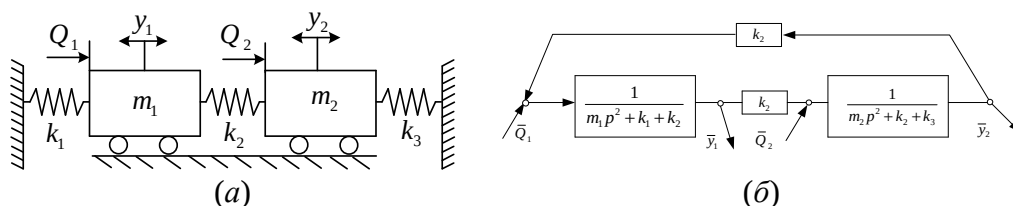


Рис. 1. Механическая колебательная система: *а* – расчетная схема, *б* – структурная схема с учетом коэффициента связности внешних воздействий γ .

Под воздействием внешних гармонических синфазных силовых возмущений Q_1 и Q_2 массинерционные элементы совершает малые вынужденные установившиеся колебания относительно положений статического равновесия. Смещения y_1 , y_2 массинерционных элементов m_1 , m_2 относительно положения статического равновесия служат обобщенными координатами. На основе использования известных методов [1-2] может быть построена структурная схема (рис.1б), в которой $p=j\omega$ – комплексная переменная, $j=\sqrt{-1}$, « $-$ » над символом обозначает преобразование Лапласа. Между силовыми возмущениями Q_1 и Q_2 реализована функциональная связь:

$$Q_2 = \gamma Q_1, \quad (1)$$

где коэффициентом связности $\gamma \in (-\infty, \infty)$.

Задача заключается в разработке метода обобщенных характеристик для оценки совокупности динамических особенностей механической колебательной системы в зависимости от коэффициента связности внешних силовых возмущений.

II. Математическая модель. На основе структурной схемы (рис. 1б) с помощью известных методов [1-2] могут быть определены передаточные отношения и построены их амплитудно-частотные характеристики:

$$A_{11}(\omega) = \left. \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} \right|_{p=j\omega} = \frac{-m_2(\omega^2 - (n_2^2 + \gamma\Delta_2^2))}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}, \quad (2)$$

$$A_{22}(\omega) = \left. \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_2} \right|_{p=j\omega} = \frac{-m_1(\omega^2 - (n_1^2 + \frac{\Delta_1^2}{\gamma}))}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}, \quad (3)$$

где характерные частоты системы:

$$n_1^2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1}, \quad n_2^2 = \frac{k_2 + k_3}{m_2}, \quad \Delta_1^2 = \frac{k_2}{m_1}, \quad \Delta_2^2 = \frac{k_2}{m_2},$$

$$\omega_1^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2}\right)^2 + \Delta_1^2 \Delta_2^2}, \quad \omega_2^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2}\right)^2 + \Delta_1^2 \Delta_2^2}.$$

Для фиксированного коэффициента связности внешних воздействий γ амплитудно-частотные характеристики (2), (3) позволяет определить совокупность динамических состояний и форм взаимодействий [8].

III. Построение динамических инвариантов на основе частотной функции обнуления. Частотные интервалы, на которых амплитудно-частотная функция знакоопределена, и критические частоты, в которых реализуется резонанс или обнуление амплитуды колебания соответствующей координаты y_1 (2), могут быть определены на основе частотной функции обнуления:

$$\omega_0^2 = n_2^2 + \gamma \Delta_2^2. \quad (10)$$

В общем случае совокупность динамических особенностей механической колебательной системы для фиксированного коэффициента связности γ определяется расположением частоты $\omega_0(\gamma)$ обнуления амплитуды колебания координаты y_1 относительно собственных частот ω_1, ω_2 (рис. 2).

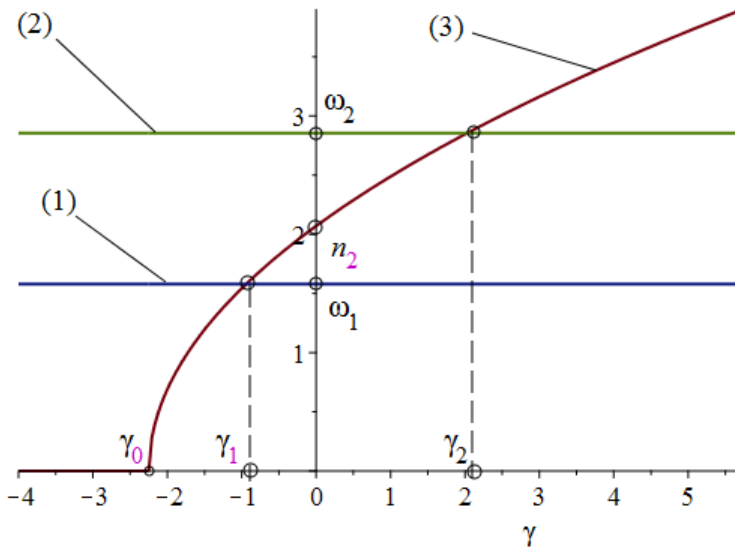


Рис. 2. Частотная функция обнуления координаты y_1 : 1 – уровень собственной частоты ω_1 , 2 – уровень собственной частоты ω_2 , 3 – $\omega_0(\gamma)$ частотная функция обнуления амплитуды колебания y_1

Построение совокупности динамических инвариантов (табл. 1, стр. II, стр. III) может быть реализовано с помощью частотной функции обнуления амплитуды колебания координаты элемента (рис. 2). Для фиксированного коэффициента связности γ динамические особенности в виде количества критических состояний обнуления амплитуд колебаний, резонансов, положительных и отрицательных форм динамических взаимодействий могут быть представлены в виде характеристик графов динамических состояний и форм динамических взаимодействий (табл. 1, стр. IV). Динамические особенности в виде графов могут быть рассмотрены в качестве своеобразных инвариантов, сохраняющихся в определенных критических значениях или интервалах (табл. 1, стр. I) значений коэффициента связности внешних силовых возмущений.

В обобщенном виде динамические особенности в виде графов могут быть представлены выражениями $S_i^j F_k^l$, где i – количество состояний

обнуления амплитуд колебаний, j – количество резонансов, k – количество отрицательных динамических форм взаимодействий, l – количество положительных форм взаимодействий.

Табл. 1. Динамические инварианты с учетом значений коэффициента γ

	1	2	3	4	5	6	7
I	$\gamma < \gamma_0$	$\gamma = \gamma_0$	$\gamma_0 < \gamma < \gamma_1$	$\gamma = \gamma_1$	$\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$	$\gamma = \gamma_2$	$\gamma_2 < \gamma$
II							
III							
IV	$S_0^2 F_2^1$	$S_1^2 F_1^2$	$S_1^2 F_2^2$	$S_0^1 F_1^1$	$S_1^2 F_2^2$	$S_0^1 F_1^1$	$S_1^2 F_2^2$

В обобщенном смысле динамические особенности (рис.3 а-г) с учетом коэффициента связности внешних возмущений γ могут быть представлены в виде интегральной характеристики, представляющей собой алгебраическую сумму числа отдельных динамических особенностей механической колебательной системы (рис. 1).

IV. Интегральные характеристики в оценке динамических особенностей механических колебательных систем в зависимости от коэффициента связности внешних возмущений силовой природы. Специфические характеристики динамических инвариантов (табл. 1) механической колебательной системы (рис. 1) могут быть представлены графиками кусочно-постоянных функций в зависимости от коэффициента связности внешних силовых возмущений (рис. 3).

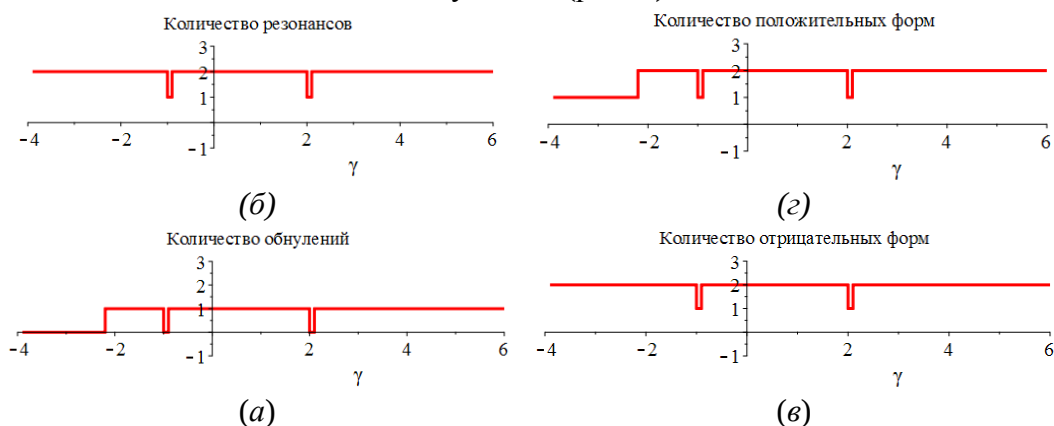


Рис. 3. Динамические инварианты элемента. (а) – количество состояний обнуления амплитуд колебания координаты y_1 , (б) – количество резонансов, (в) – количество отрицательных форм динамических взаимодействий элементов механической колебательной систем, (г) – количество положительных форм взаимодействий

Интегральная характеристика (рис. 4) отображает сохранение количества динамических особенностей на интервалах $(-\infty, \gamma_0)$, (γ_0, γ_1) , (γ_1, γ_2) , (γ_2, ∞) .

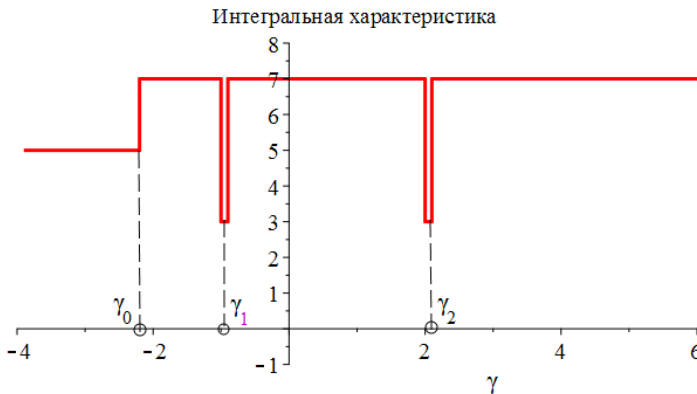


Рис. 4. Интегральная характеристика механической колебательной системы:
 $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ – критические значения коэффициента связности

Вместе с тем, для значений коэффициентов связности $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ интегральная характеристика терпит разрывы, что отражает существенное изменение совокупности динамических особенностей в окрестности критических значений, что показывает наличие специфических значений коэффициентов связности, которых могут интерпретироваться как признаки неустойчивости.

Закключение. Разработан подход к построению совокупности динамических инвариантов механических колебательных систем с учетом коэффициента связности на основе частотной функции обнуления амплитуды колебаний координаты массоинерционного элемента, рассматриваемого в качестве объекта, динамическое состояние которого оценивается.

Показано, что совокупности существенных динамических особенностей механической колебательной системы могут быть отображены в виде графов, рассматриваемыми в качестве своеобразных инвариантов, сохраняющихся для определенных значений параметров системы.

Показано, что для систем, включающих в свой состав вариационный параметр (в рамках рассматриваемой работы – это коэффициент связности) обобщенные свойства динамических инвариантов могут быть представлены кусочно-постоянными интегральными характеристиками.

Показано, что интегральные характеристики терпят разрывы в критических точках вариационного параметра. Разрывы интегральных характеристик могут быть разделены на «разрывы-выбросы» (устраняемые разрывы 1-ого рода) и «разрывы-ступеньки» (неустраняемые разрывы 1-ого рода).

Разработан метод оценки динамических особенностей механических колебательных систем, включающих в свой состав вариационные параметры, на основе представлений о динамических инвариантах, обобщенные свойства

которых могут быть отображены интегральными характеристиками, в общем случае имеющими разрывы.

Предлагаемая концепция отображения динамических особенностей механических колебательных систем на основе интегральных характеристик динамических инвариантов могут быть использована в разработке технологии оценки, контроля и формирования динамических режимов движения технических объектов, находящихся в условиях вибрационного нагружения силовой природы.

В рамках предлагаемой концепции показано, что изменение вариационного параметра отображается кусочно-постоянной разрывной интегральной характеристикой.

Таким образом, можно полагать, что для обеспечения постоянства интегральной характеристики настроечный параметр, либо должен находиться в определенных границах, либо в структуру системы должны быть включены дополнительные связи.

Список литературы

1. Елисеев С.В., Артюнин А.И. Прикладная теория колебаний в задачах динамики линейных механических систем. Новосибирск: Наука, 2016. 459с.
2. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П., Засядко А.А. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов. Иркутск: Изд-во ИГУ, 2008. 523 с.
3. Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В. Сочленения звеньев в динамике механических колебательных систем. Иркутск: Изд-во ИрГУПС, 2012. 156с.
4. Елисеев А.В. Развитие системных представлений в динамике колебательных структур: частотная функция и формы связности движений элементов // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2020. № 4 (68). С. 40-49.
5. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control, Vol.252, Springer International Publishing, Cham, 2020, 521 p.
6. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Московских А.О. Динамика машин. Системные представления, структурные схемы и связи элементов. М.: Инновационное машиностроение, 2019. 381 с.
7. Елисеев С.В., Елисеев А.В., Большаков Р.С., Хоменко А.П. Методология системного анализа в задачах оценки, формирования и управления динамическим состоянием технологических и транспортных машин. Новосибирск: Наука, 2021. 679 с.
8. Елисеев А.В., Миронов А.С. Новые подходы к оценке режимов динамического гашения колебаний вибрационных машин транспортного и технологического назначения: графы динамических состояний и форм

взаимодействия элементов // Мехатроника, автоматика и робототехника. 2022. №9. С. 23-29. doi.org/10.26160/2474-5901-2022-28-22-25.

9. Елисеев А.В. Системные подходы в задачах динамики машин, приборов и аппаратуры // А.В. Елисеев, Кузнецов Н.К., Елисеев С.В. Москва-Вологда: Инфра-Инженерия, 2022. 384 с.

References

1. Eliseev S.V., Artyunin A.I. Applied theory of oscillations in problems of dynamics of linear mechanical systems. Novosibirsk: Science, 2016. 459 p.
2. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P., Zasyadko A.A. Dynamic synthesis in generalized problems of vibration protection and vibration isolation of technical objects. Irkutsk: Publishing House of the ISU, 2008. 523 p.
3. Eliseev S.V., Ermoshenko Yu.V. Articulations of links in the dynamics of mechanical oscillatory systems. Irkutsk: Publ. house of IrGUPS, 2012. 156 p.
4. Eliseev A.V. Development of system representations in dynamics of oscillatory structures: frequency function and forms of connectivity of movements of elements // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2020. No. 4 (68). P. 40-49.
5. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control, Vol.252, Springer International Publishing, Cham, 2020, 521 p.
6. Eliseev A.V., Kuznetsov N.K., Moskovskikh A.O. Dynamics of machines. System representations, block diagrams and connections of elements. M.: Innovative Mechanical engineering, 2019. 381 p.
7. Eliseev S.V., Eliseev A.V., Bolshakov R.S., Khomenko A.P. Methodology of system analysis in the tasks of evaluation, formation and management of the dynamic state of technological and transport machines. Novosibirsk: Science, 2021. 679 p.
8. Eliseev A.V., Mironov A.S. New approaches to the evaluation of modes of dynamic damping of vibrations of vibrating machines of transport and technological purpose: graphs of dynamic states and forms of interaction of elements // Mechatronics, automation and robotics. 2022. No. 9. P. 23-29. doi.org/10.26160/2474-5901-2022-28-22-25.
9. Eliseev A.V. System approaches in problems of dynamics of machines, devices and equipment // A.V. Eliseev, N.K. Kuznetsov, S.V. Eliseev. Moscow-Vologda: Infra-Engineering, 2022. 384 p.

Елисеев Андрей Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры математики	Eliseev Andrey Vladimirovich – candidate of technical sciences, associate professor of Department of Mathematics
Миронов Артем Сергеевич – соискатель eavsh@ya.ru	Mironov Artem Sergeevich – applicant

Received 06.05.2022