

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД ПРОЕКТИРОВАНИЯ КИХ-ФИЛЬТРОВ В ЗАДАЧАХ РАЗДЕЛЕНИЯ СИГНАЛОВ

Филимонов А.Б., Рашиди А.Х.

Ключевые слова: КИХ-фильтры, задача разделения сигналов, дискретные динамические модели, алгебраический метод проектирования.

Аннотация. Обсуждается возможность применения фильтров с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтры) в задачах разделения аддитивной смеси сигналов, представленных дискретными динамическими моделями. Предложен алгебраический метод синтеза таких КИХ-фильтров, сводящий определение его коэффициентов к решению линейного функционального уравнения для многочленов.

ALGEBRAIC DESIGN METHOD OF DESIGN FINITE IMPULSE RESPONSE FILTERS IN TASK SEPARATION SIGNALS

Filimonov A.B., Rashidi A.H.

Keywords: finite impulse response filters, signal separation problem, discrete dynamic models, algebraic design method.

Abstract. The possibility of using finite impulse response filters (FIR-filters) in the problems of separating the additive mixture of signals represented by discrete dynamic models is discussed. An algebraic method of synthesis such FIR-filters is proposed, which reduces the determination of its coefficients to the solution of a linear functional equation for polynomials.

Фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтры) находят широкое применение в области цифровой обработки сигналов. Традиционный подход к их проектированию связан с заданием желаемой частотной характеристики фильтра. В работе обсуждается другая возможность их применения – в задачах разделения аддитивной смеси сигналов, представленных дискретными динамическими моделями.

Обозначим через $x(t)$ исходный аналоговый сигнал, t - непрерывное время. Полагаем, что данный сигнал является аддитивной смесью полезного сигнала $x_1(t)$ и помехи $x_2(t)$:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t). \quad (1)$$

Для цифровой обработки сигнала $x(t)$ выполняется его дискретизация с периодом T^* . Введем обозначение для отдельных *отсчетов* рассматриваемых сигналов:

$$x[n] = x(nT^*), \quad x_1[n] = x_1(nT^*), \quad x_2[n] = x_2(nT^*),$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ - дискретное время (номер отсчета).

Согласно (1)

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n], \quad (2)$$

Решаемая задача состоит в построении КИХ-фильтра, который следующим образом обрабатывает сигнал (2): пропускает составляющую $x_1[n]$ и одновременно подавляет составляющую $x_2[n]$.

Считаем, что сигнал $x_i[n]$ ($i = 1, 2$) генерируется динамической системой m_i -го порядка, описывающейся линейным однородным разностным уравнением

$$x_i[n] + \sum_{k=1}^{m_i} a_k^i x_i[n-k] = 0, \quad (3)$$

где $a_{m_i}^i \neq 0$. Начальные условия для данного уравнения (полагаем их ненулевыми) определяются набором величин $x_i[\theta]$, $m_i \leq \theta < 0$.

Определим многочлены ($i = 1, 2$)

$$A_i(z^{-1}) = 1 + \sum_{k=1}^{m_i} a_k^i z^{-k}, \quad (4)$$

где $z \in \mathbb{C}$ - комплексная переменная, а $\mathbb{C}$ - комплексная плоскость.

Обозначим через D оператор задержки на один такт:

$$Dx(t) = x(t-1).$$

Уравнения (3) можно переписать в операторной форме:

$$A_i(D)x_i[n] = 0. \quad (5)$$

Рассмотрим также характеристический многочлен разностного уравнения (3):

$$L_i(z) = z^{m_i} + \sum_{k=1}^{m_i} a_k^i z^{m_i-k}. \quad (6)$$

Обозначим через Λ_i множество корней многочлена (6):

$$\Lambda_i = \{z \in \mathbb{C} \mid L_i(z) = 0\}.$$

Будем полагать, что рассматриваемые системы имеют различную модальную структуру, т.е. множества Λ_1 и Λ_2 не пересекаются:

$$\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset. \quad (7)$$

Пример 1. Пусть сигнал $x_1[n]$ является квадратичной функцией, а $x_2[n]$ - гармоническим сигналом с периодом $T > 0$:

$$x_1[n] = a_0 + a_1 n + a_2 n^2, \quad x_2[n] = b \sin(\omega n),$$

где a_0, a_1, a_2, b, ω - вещественные постоянные, причем:

$$|a_0| + |a_1| + |a_2| > 0, b \neq 0, \omega = 2\pi/T.$$

Тогда

$$L_1(z) = (z-1)^3 = z^3 - 3z^2 + 3z - 1,$$

$$L_2(z) = (z - e^{j\omega})(z - e^{-j\omega}) = z^2 - 2\cos(\omega)z + 1.$$

В общем виде уравнение КИХ-фильтра порядка N имеет вид

$$y[n] = \sum_{k=0}^N h(k)x[n-k], \quad (8)$$

где $h(k)$, $k = 0:N$, - коэффициенты фильтра. Рис. 1 поясняет его структуру.

Согласно (8), передаточная функция $H(z)$ фильтра имеет вид

$$H(z) = \sum_{k=0}^N h(k)z^{-k}.$$

Посредством разностного оператора

$$H(D^{-1}) = \sum_{k=0}^N h(k)D^k$$

уравнение (8) можно переписать в операторной форме

$$y[n] = H(D^{-1})x[n].$$

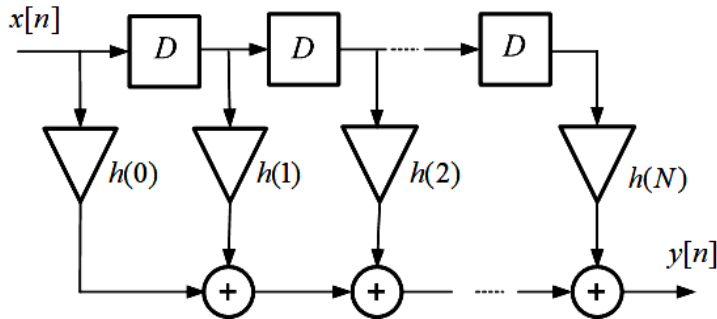


Рис. 1. Структурная схема КИХ-фильтра

Согласно (8), передаточная функция $H(z)$ фильтра имеет вид

$$H(z) = \sum_{k=0}^N h(k)z^{-k}.$$

Посредством разностного оператора

$$H(D^{-1}) = \sum_{k=0}^N h(k)D^k$$

уравнение (8) можно переписать в операторной форме

$$y[n] = H(D^{-1})x[n].$$

Желаемое действие проектируемого КИХ-фильтра выражают следующие равенства:

$$(1 - H(D^{-1}))x_1[n] = 0, \quad (9)$$

$$H(D^{-1})x_2[n] = 0, \quad (10)$$

которые обеспечивают требуемый результат фильтрации:

$$y[n] = x_1[n]. \quad (11)$$

Из (9) и (10) с учетом (5) следует, что многочлен $A_1(z^{-1})$ должен быть делителем многочлена $1 - H(z)$, а многочлен $A_2(z^{-1})$ - делителем многочлена $H(z)$. Это означает существование некоторых многочленов $q_1(z^{-1})$ и $q_2(z^{-1})$, удовлетворяющих системе уравнений

$$1 - H(z) = q_1(z^{-1})A_1(z^{-1}),$$

$$H(z) = q_2(z^{-1})A_2(z^{-1}).$$

Отсюда следует линейное функциональное уравнение относительно неизвестных многочленов $q_1(z^{-1})$ и $q_2(z^{-1})$

$$q_1(z^{-1})A_1(z^{-1}) + q_2(z^{-1})A_2(z^{-1}) = 1. \quad (12)$$

Согласно (7) многочлены $L_1(z)$ и $L_2(z)$ являются взаимно простыми. Но тогда в силу формул (4) являются взаимно простыми также многочлены $A_1(z^{-1})$ и $A_2(z^{-1})$. Отсюда следует (см. например, [2]) существование решений уравнения (12).

Опишем один из способов решения функционального уравнения (12). Разделим данное уравнение на многочлен $A_1(z^{-1})A_2(z^{-1})$ - получим эквивалентное уравнение

$$\frac{1}{A_1(z^{-1})A_2(z^{-1})} = \frac{q_2(z^{-1})}{A_1(z^{-1})} + \frac{q_1(z^{-1})}{A_2(z^{-1})}. \quad (13)$$

Рациональную дробь в левой части равенства разложим на сумму простейших дробей. Далее отдельно сгруппируем слагаемые, полюса которых совпадают с нулями многочлена $A_1(z^{-1})$, и слагаемые, полюса которых совпадают с нулями многочлена $A_2(z^{-1})$. Затем выполним суммирование дробей в первой и во второй группах - посредством приведения их соответственно к общему знаменателю $A_1(z^{-1})$ и $A_2(z^{-1})$. В результате получим правую часть соотношения (13) и, следовательно, найдем искомые многочлены $q_1(z^{-1})$ и $q_2(z^{-1})$.

Пример 2. Возьмем данные из примера 1, полагая $T = 10$. Тогда

$$A_1(z^{-1}) = 1 - 3z^{-1} + 3z^{-2} - z^{-3}, \quad A_2(z^{-1}) = 1 - 1.6180z^{-1} + z^{-2}.$$

Для программной реализации изложенного способа решения уравнения (12) в среде математического пакета MATLAB использовалась функция `residuez` [3]. В итоге получено следующее решение:

$$q_1(z^{-1}) = 3.7321 - 10.1962z^{-1},$$

$$q_2(z^{-1}) = -2.7321 + 16.6603z^{-1} - 10.1962z^{-2},$$

$$H(z) = -2.732 + 21.39z^{-1} - 41.78z^{-2} + 34.32z^{-3} - 10.2z^{-4}.$$

Вычислительные эксперименты по моделированию процессов фильтрации в системе MATLAB иллюстрируют рис. 2 и 3.

Заметим, что построенный КИХ-фильтр точно воспроизводит полезный сигнал в соответствии с требованием (11) лишь через время последствия после подачи на него исходного сигнала, которое определяется памятью фильтра и равно $N = 4$ тактам.

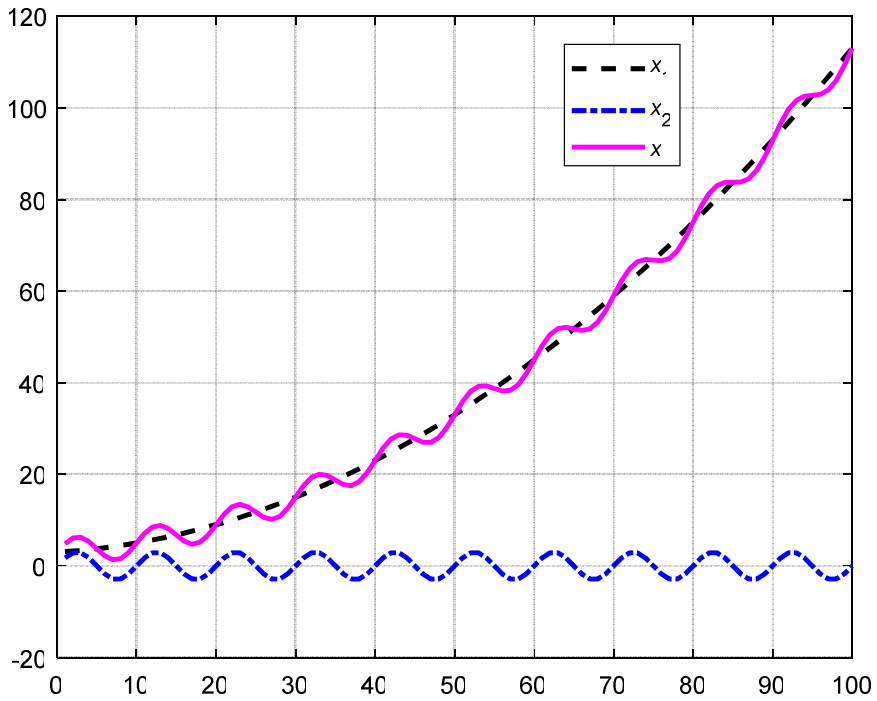


Рис. 2. Исходный сигнал и его компоненты

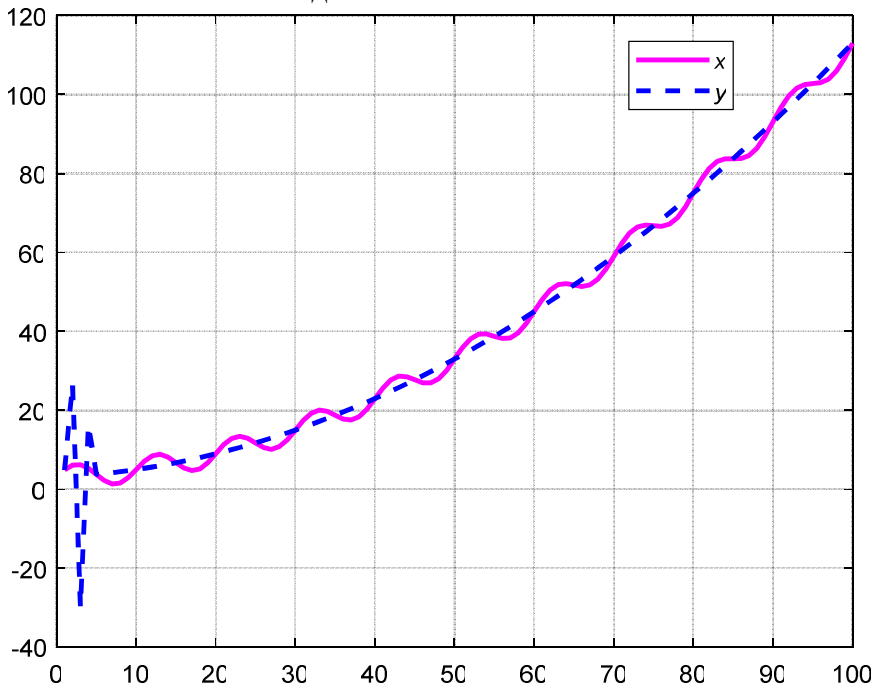


Рис. 3. Результат фильтрации

Отметим один важный аспект обсуждаемой задачи цифровой фильтрации – в ее постановке фактически заложен так называемый *принцип использования порождающей динамической системы* [4], суть которого

состоит в том, чтобы вместо постулирования формы обрабатываемых сигналов задавать динамические модели систем, генерирующих эти сигналы. Действительно, для компонентов $x_1[n]$ и $x_2[n]$ исходного сигнала (2) порождающими являются динамические модели (3).

Заметим, что построенный КИХ-фильтр точно воспроизводит полезный сигнал в соответствии с требованием (11) лишь через время последствий после подачи на него исходного сигнала, которое определяется памятью фильтра и равно $N = 4$ тактам.

Следует отметить один важный аспект обсуждаемой задачи цифровой фильтрации – в ее постановке фактически заложен так называемый *принцип использования порождающей динамической системы* [4], суть которого состоит в том, чтобы вместо постулирования формы обрабатываемых сигналов задавать динамические модели систем, генерирующих эти сигналы. Действительно, для компонентов $x_1[n]$ и $x_2[n]$ исходного сигнала (2) порождающими являются динамические модели (3).

Список литературы

1. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер, 2002.
2. Мишина А.П., Проскуряков И.В. Высшая алгебра: линейная алгебра, многочлены, общая алгебра. М. Физматгиз, 1965.
3. Рудаков П.И., Сафонов И.В. Обработка сигналов и изображений. MATLAB 5.x. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2000.
4. Белов Л.А. Радиоэлектроника. Формирование стабильных частот и сигналов. М.: Изд. Юрайт, 2018.

References

1. Sergienko A. Digital signal processing, Saint-Petersburg: Piter, 2002.
2. Mishina A.P., Proskuryakov I.V. Higher algebra: linear algebra, polynomials, General algebra, Moscow: Fizmatgiz, 1965.
3. Rudakov P.I., Safonov I.V. Signal and image Processing. MATLAB 5. Moscow: DIALOGUE-MIFI, 2000.
4. Belov L.A. Radioelectronics. Formation of stable frequencies and signals. Moscow: Publishing Yurayt, 2018.

Филимонов Александр Борисович – д.т.н., профессор, Московский авиационный институт (Национально исследовательский университет), Москва, Россия, filimon_ab@mail.ru	Filimonov Alexandr Borisovich – dr. of eng. sc., professor, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia, filimon_ab@mail.ru
Ходжатоллах Рашиди Алашти – аспирант, Московский авиационный институт (Национально исследовательский университет, Москва, Россия, rsh_hojat@yahoo.com	Hojatollah Rashidi Alashty – postgraduate, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia, rsh_hojat@yahoo.com

Received 02.02.2019