

УСТОЙЧИВОСТЬ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Конева С.А., Олейниченко Н.Н.

Ключевые слова: устойчивость, система с распределенными параметрами, область устойчивости, функционал, запаздывание.

Аннотация. Используется применение функционала вместо функций Ляпунова с целью определения условия асимптотической устойчивости системы параболического типа с запаздыванием. Получено условие, обеспечивающее устойчивость тривиального решения системы.

STABILITY OF THE PARABOLIC SYSTEM WITH THE LATE ARGUMENT

Koneva S.A., Oleynichenko N.N.

Keywords: stability, system with distributed parameters, stability region, functional, delay.

Abstract. The functional is used instead of Lyapunov functions. The goal is to determine the conditions for the asymptotic stability of a system of parabolic type with delay. A condition is obtained that ensures the stability of the trivial solution of the system.

Как известно, идея второго метода Ляпунова состоит в подборе определенно положительной функции ($V(x_1, x_2, \dots, x_m, t) \geq W(x_1, x_2, \dots, x_m) \geq 0$, $W=0$ только при $x_1=0 \forall i$) для системы дифференциальных уравнений, не возрастающей вдоль траектории системы $\left(\frac{dV}{dt} \leq 0\right)$, что гарантирует устойчивость тривиального решения системы.

Достаточно плодотворным оказалось предположение Н.Н. Красовского [1], рассматривавшего вместо функций Ляпунова функционалы с аналогичными свойствами. Этот прием был использован для системы с сосредоточенным параметром с запаздыванием [2].

Представляет интерес определить устойчивость системы с распределенным параметром с запаздыванием.

Рассматривается система параболического типа

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij}(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} \right) + b \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij}(x) \frac{\partial u(x, t-\tau)}{\partial x_j} \right), \quad (1)$$

где a, b, τ - const; $A_{ij}(x) = A_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_m)$. x - точки области $G \subset R^m$. На границе Γ области G задается однородное условие первого рода

$$u(x, t) \Big|_{x \in \Gamma} = 0. \quad (2)$$

Уравнение (1) сопровождается начальным условием

$$u(x, t) = \varphi(x, t) \text{ при } \tau \leq t \leq 0. \quad (3)$$

Тривиальному решению соответствует нулевая начальная функция. Матрица $\|A_{ij}(x)\|$ положительно определена. Для всех $x \in G$ выполняется условие

$$\sum_{i,j=1}^m A_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^m \xi_i^2, \quad (4)$$

где α некоторая положительная постоянная.

Ранее автором были доказаны [2] существование и единственность решения задачи (1)...(3). Это решение и его производная по t принадлежат $L_2(G)$. Основным результатом работы содержится в утверждении.

Утверждение: тривиальное решение системы (1)...(3) устойчиво при условии $a \geq |b|$.

Это же условие определяет структуру области устойчивости системы в плоскости параметров a, b .

Для обоснования утверждения рассматриваем функционал

$$V(x, t) = \int_G u^2(x, t) dx + |b| \int_{t-\tau}^t \int_G \left(\sum_{i,j=1}^m A_{ij}(x) \frac{\partial u(x, s)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x, s)}{\partial x_j} \right) dx ds.$$

Он непрерывен, дифференцируем по t и определенно-положительный.

Рассчитаем его полную производную по t :

$$\begin{aligned} \frac{dV(x, t)}{dt} &= 2 \int_G u \frac{\partial u}{\partial t} dx + |b| \int_G \left(\sum_{i,j=1}^m A_{ij}(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} \right) dx - \\ &- |b| \int_G \left(\sum_{i,j=1}^m A_{ij}(x) \frac{\partial u(x, t-\tau)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x, t-\tau)}{\partial x_j} \right) dx. \end{aligned}$$

Вместо $\partial u(x, t) / \partial t$, под знаком первого интеграла пишем правую часть уравнения (1). Получим

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= 2a \int_G \left(u(x, t) \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij}(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} \right) \right) dx + 2b \int_G \left(u(x, t) \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij}(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} \right) \right) dx + \\ &+ |b| \int_G \left(\sum_{i,j=1}^m A_{ij}(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} \right) dx - |b| \int_G \left(\sum_{i,j=1}^m A_{ij}(x) \frac{\partial u(x, t-\tau)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x, t-\tau)}{\partial x_j} \right) dx. \end{aligned}$$

Выполним интегрирование по частям первых двух интегралов, используем вторую формулу Грина [3]. При этом используется граничное условие (2), благодаря которому в названной формуле интегралы по поверхности Γ обращаются в нуль.

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= -2a \int_G \left(\sum_{i,j=1}^m A_{ij}(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} \right) dx - 2b \int_G \left(\sum_{i,j=1}^m A_{ij}(x) \frac{\partial u(x, t-\tau)}{\partial x_j} \right) dx + \\ &+ |b| \int_G \left(\sum_{i,j=1}^m A_{ij}(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} \right) dx - |b| \int_G \left(\sum_{i,j=1}^m A_{ij}(x) \frac{\partial u(x, t-\tau)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x, t-\tau)}{\partial x_j} \right) dx. \end{aligned}$$

Производная функционала вдоль траектории окончательно определяется выражением

$$\begin{aligned}
 \frac{dV(t)}{dt} = & -2(a - |b|) \int_G \left(\sum_{i,j=1}^m A_{ij}(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j} \right) dx - \\
 & - |b| \int_G \left(\sum_{i,j=1}^m A_{ij}(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j} \right) dx - \\
 & - 2b \int_G \left(\sum_{i,j=1}^m A_{ij}(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x,t-\tau)}{\partial x_j} \right) dx - \\
 & - |b| \int_G \left(\sum_{i,j=1}^m A_{ij}(x) \frac{\partial u(x,t-\tau)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x,t-\tau)}{\partial x_j} \right) dx. \\
 \frac{dV(t)}{dt} = & -2(a - |b|) \int_G \left(\sum_{i,j=1}^m A_{ij}(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j} \right) dx - \\
 & - |b| \int_G \left(\sum_{i,j=1}^m A_{ij}(x) \frac{\partial (u(x,t) \pm u(x,t-\tau))}{\partial x_i} \frac{\partial (u(x,t) \pm u(x,t-\tau))}{\partial x_j} \right) dx. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Знак плюс в подынтегральном выражении второго интеграла соответствует случаю $b > 0$, а знак минус – случаю $b < 0$. Под знаками обоих интегралов в правой части равенства (5) стоят положительно определенные квадратичные формы. Если коэффициент $a - |b| \geq 0$, то вся правая часть в этом равенстве неотрицательна. Чтобы сделать более очевидной справедливость этого утверждения, используем условие (4) и перейдем от равенства (5) к следующему неравенству:

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq -2(a - |b|) \alpha \int_G \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u(t)}{\partial x_i} \right)^2 dx - |b| \alpha \int_G \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial (u(t) \pm u(t-\tau))}{\partial x_i} \right)^2 dx \leq 0. \quad (6)$$

Здесь уже учтено неравенство $a \geq |b|$.

Последнее неравенство можно усилить, используя неравенство Фридрихса [3]

$$\int_G \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx = \nu \int_G u^2 dx, \quad \nu > 0, \quad u|_{\Gamma} = 0.$$

Неравенство (6) приобретает вид:

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq -2(a - |b|) \alpha \nu \int_G u^2(t) dx - |b| \alpha \nu \int_G [u(t) \pm u(t-\tau)]^2 dx.$$

Неравенство $a \geq |b|$ обеспечивает не положительность $dV(x,t)/dt$, что означает устойчивость тривиального решения исходной системы

Замечание. Условие $a \geq |b|$ обеспечивает устойчивость тривиального решения системы и более общего вида:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij}(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j} \right) + b \sum_{i,j}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij}(x) \frac{\partial u(x,t-\tau)}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^m b_i \frac{\partial u(x,t-\tau)}{\partial x_i},$$

где $a_i, b_i \forall i$ постоянны.

При использовании в этом случае формулы Грина, последние две суммы, за счет постоянства a_i, b_i , аннулируются. Выражение $\frac{dV(x,t)}{dt}$ останется прежним. Оно также будет определяться формулой (6).

Список литературы

1. Красовский Н.Н. Некоторые задачи устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1979. – 213 с.
2. Конева С.А. Об устойчивости тривиального решения смешанной задачи для системы с распределенными параметрами параболического типа / С.А. Конева, Г.П. Кухта // Динамические системы. Межведомственный научный сборник. Выпуск 14. – Симферополь: Таврия, 1998. – С. 163-167.
3. Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л.Э. Эльсгольц, С.Б. Норкин. – М. Наука, 1971. – 296 с.

References

1. Krasovsky N.N. Some problems of motion stability. – M.:– Fizmatgiz, 1979. – 213 p.
2. Koneva S.A. On the stability of the trivial solution of a mixed problem for a system with distributed parameters of parabolic type / S.A. Koneva, G.P. Kuhta // Dynamic systems. Interdepartmental scientific collection Release 14. – Simferopol: Tavriya, 1998. – P. 163-167.
3. Elsgolz L.E. Introduction to the theory of differential equations with deviating argument / L.E. Elsgolz, S.B. Norkin. – M.: Science, 1971. – 296 p.

Конева Светлана Андреевна – кандидат технических наук, доцент кафедры судового электрооборудования, ksa2602@mail.ru	Konev Svetlana Andreevna – candidate of technical sciences, assistant professor of marine electrical equipment, ksa2602@mail.ru
Олейниченко Наталья Николаевна – кандидат технических наук, доцент кафедры судового электрооборудования, nno_sgu@mail.ru	Oleynichenko Natalia Nikolaevna – candidate of technical sciences, assistant professor of marine electrical equipment, nno_sgu@mail.ru
Севастопольский государственный университет, Севастополь, Россия	Sevastopol State University, Sevastopol, Russia

Received 14.03.2019