

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ ПРЕДИКТОРОВ С КОНЕЧНОЙ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Филимонов А.Б., Рашиди А.Х.

Ключевые слова: временной ряд, прогнозирование, разностные уравнения, линейный предиктор, алгебраический метод синтеза.

Аннотация. Рассматривается задача прогнозирования временного ряда, представляющего результаты измерения выхода объекта наблюдения. Предлагается алгебраический метод синтеза предиктора временного ряда, имеющего структуру КИХ-фильтра. Обсуждается нейросетевая реализация предикторов данного класса.

AN ALGEBRAIC METHOD FOR THE SYNTHESIS OF LINEAR PREDICTORS WITH FINITE IMPULSE RESPONSE

Filimonov A.B., Rashidi A.H.

Keywords: time series, forecasting, difference equations, linear predictor, algebraic method of synthesis.

Abstract. The problem of time series forecasting, representing the measurement results of output of the observed object is considered. The algebraic method for the synthesis of the linear predictor having the structure of filter with finite impulse characteristic is suggested. Neural network realization of the predictors of the given class is discussed.

Прогнозирование временных рядов (ВР) является важной научно-технической проблемой, возникающей в различных областях человеческой деятельности. О развитии и современном состоянии исследований в данной области прикладной статистики можно судить по работам [1-7].

В настоящей работе предлагается алгебраический метод синтеза предиктора ВР, имеющего структуру КИХ-фильтра.

Динамическая модель процесса наблюдения

Пусть ВР $y(t)$, $t \in 1:T$, является аддитивной смесью полезного сигнала $x(t)$ и помехи $\eta(t)$:

$$y(t) = x(t) + \eta(t). \quad (1)$$

Будем использовать стандартные обозначения для числовых множеств: $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{Z}_+$, $\mathbf{N}$ - соответственно множество вещественных, комплексных, неотрицательных целых и натуральных чисел.

Примем следующее предположение: сигнал $x(t)$ является выходом объекта наблюдения, динамика которого описывается линейным однородным разностным уравнением порядка $n > 1$ вида

$$x(t) + a_1 x(t-1) + \dots + a_n x(t-n) = 0, \quad (2)$$

где $t \in \mathbf{Z}_+$ - дискретное время; $a_i \in \mathbf{R}$ ($i=1:n$) - постоянные коэффициенты, причем:

$$a_n \neq 0. \quad (3)$$

Начальные условия для данного уравнения (полагаем их ненулевыми) определяются набором величин $x(\theta)$, $n \leq \theta < 0$.

Также полагаем, что помеха является случайным процессом с нулевым математическим ожиданием:

$$\mathbf{M}[\eta(t)] = 0. \quad (4)$$

Рассмотрим алгебраический многочлен от переменной $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$A(\lambda) = 1 + \sum_{i=1}^n a_i \lambda^i. \quad (5)$$

Обозначим через D оператор задержки дискретных сигналов на один шаг:

$$Dx(t) = x(t-1).$$

Уравнение (2) можно переписать в операторной форме:

$$A(D)x(t) = 0. \quad (6)$$

Разностная схема прогнозирования

Задача прогнозирования ВР заключается в оценке его детерминированной составляющей (тренда) $y(t)$ на заданную глубину прогноза $\tau > 0$. Таким образом, необходимо синтезировать предиктор, формирующий сигнал $\hat{x}(t+\tau|t)$ - искомую оценку значения выхода объекта $x(t+\tau)$ в каждый момент времени t по данным наблюдения до этого момента времени.

Теорема 1. Для любого $\tau \in \mathbb{N}$ существуют многочлены $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$, удовлетворяющие многочленному уравнению

$$\lambda^\tau P(\lambda) + A(\lambda)Q(\lambda) = 1, \quad (7)$$

причем степени искомых многочленов удовлетворяют условиям

$$m = \deg P(\lambda) < n, \quad \deg Q(\lambda) < \tau. \quad (8)$$

Доказательство. Разделим данное уравнение на многочлен $\lambda^\tau A(\lambda)$ - получим эквивалентное уравнение

$$\frac{1}{\lambda^\tau A(\lambda)} = \frac{P(\lambda)}{A(\lambda)} + \frac{Q(\lambda)}{\lambda^\tau}. \quad (9)$$

Многочлен (5) не имеет нулевых корней, так что и в силу (3) многочлены λ^τ и $A(\lambda)$ являются взаимно простыми.

Рациональную дробь в левой части равенства разложим на сумму простейших дробей. Далее отдельно сгруппируем слагаемые, полюса которых совпадают с нулями многочлена $A(\lambda)$, и слагаемые, с нулевыми полюсами (нули степени λ^τ). Затем выполним суммирование дробей в первой и во второй группах - посредством приведения их соответственно к общему знаменателю $A(\lambda)$ и λ^τ . В результате получим правую часть соотношения (9) и, следовательно, найдем искомые многочлены $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$. $\square$

Слагаемые в правой части равенства (9) являются правильными рациональными дробями, откуда следует (8).

Введем многочлен

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^m p_i \lambda^i. \quad (10)$$

Теорема 2. Любое решение $y(t)$ уравнения (2) также удовлетворяет разностному уравнению

$$x(t + \tau) - \sum_{i=0}^m p_i x(t - i) = 0. \quad (11)$$

Доказательство. Введем операторный многочлен, соответствующий алгебраическому многочлену (10):

$$P(D) = \sum_{i=0}^m p_i D^i. \quad (12)$$

Из (7) следует операторное равенство

$$1 - D^\tau P(D) = Q(D)A(D).$$

Но тогда с учетом (6) при $t \cdot \tau$ выполняются равенства

$$(1 - D^\tau P(D))x(t) = Q(D)A(D)x(t) = 0.$$

Отсюда получаем (11).

Разностное уравнение (11) в соответствии с (12) можно записать в операторной форме

$$x(t + \tau) = P(D)x(t). \quad (13)$$

Последняя теорема приводит к следующей схеме прогнозирования детерминированной составляющей ВР $y(t)$:

$$\hat{x}(t + \tau | t) = \sum_{i=0}^m p_i y(t - i). \quad (14)$$

Действительно, данное уравнение в силу (11) можно переписать в операторной форме:

$$\hat{x}(t + \tau | t) = P(D)y(t).$$

Применяя к нему операцию математического ожидания и учитывая равенства (1) и (4), получим:

$$\mathbf{M}[\hat{x}(t + \tau | t)] = P(D)x(t).$$

Отсюда согласно (13) находим $(t \cdot \tau)$

$$\mathbf{M}[\hat{x}(t + \tau | t)] = x(t + \tau).$$

Отметим, что предиктор (14) имеет структуру КИХ-фильтра.

Пример. Пусть известно, что сигнал $x(t)$ является полиномом третьей степени:

$$x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3. \quad (15)$$

Дискреты помехи $\eta(t)$ являются случайными величинами, равномерно распределенными на интервале $[-0.01, 0.01]$.

Функция (15) является решением разностного уравнения порядка $n = 4$:

$$x(t) - 4x(t - 1) + 6x(t - 2) - 4x(t - 3) + x(t - 4) = 0.$$

Таким образом,

$$A(\lambda) = 1 - 4\lambda + 6\lambda^2 - 4\lambda^3 + \lambda^4.$$

Положим $\tau = 1$. Решение уравнения (7)

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda + 4, Q(\lambda) = 1.$$

Таким образом, предиктор описывается уравнением (13), где $m = 3$, $p_0 = 4$, $p_1 = -6$, $p_2 = 4$, $p_3 = -1$

На рис. 1 показан графики сигналов $x(t)$ и $x(t + \tau)$ для варианта - $c_0 = 2$, $c_1 = 2T^{-1}$, $c_2 = -6T^{-2}$, $c_3 = 10T^{-3}$, $T = 25$. На рис. 2 приведен график выходного сигнала $x(t + \tau | t)$ синтезированного предиктора.

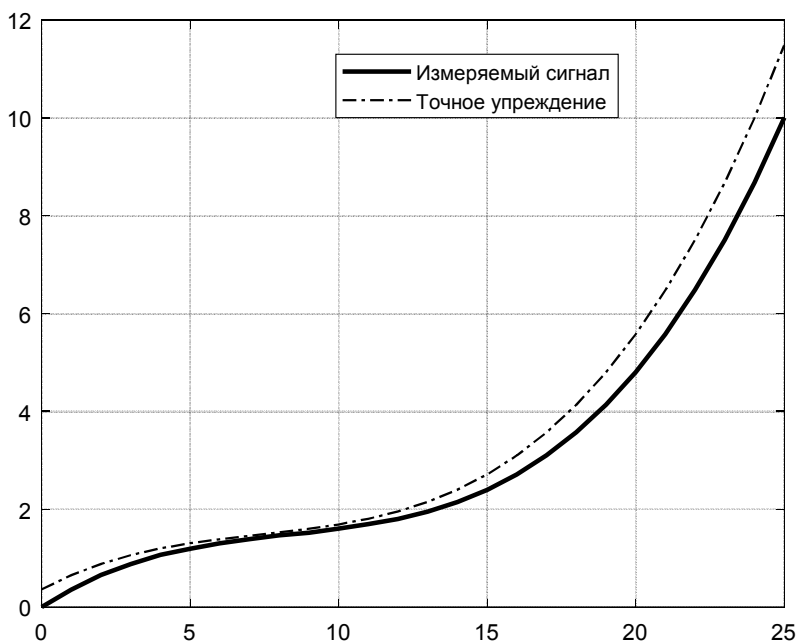


Рис. 1. Наблюдаемый и экстраполированный выходные сигналы объекта наблюдения

При построении предиктора для периода прогноза $\tau = 4$ получим параметры: $m = 3$, $p_0 = 20$, $p_1 = -45$, $p_2 = 36$, $p_3 = -10$. Его действие иллюстрирует рис. 3. Здесь мы видим существенное усиление помехи, что обусловлено большими значениями параметров предиктора. Данное обстоятельство показывает целесообразность следующего способа решения задачи многошагового прогноза: использовать одношаговый предиктор применительно к базе прогноза (периоду наблюдения), а далее на интервале прогнозирования использовать разностную модель (2).

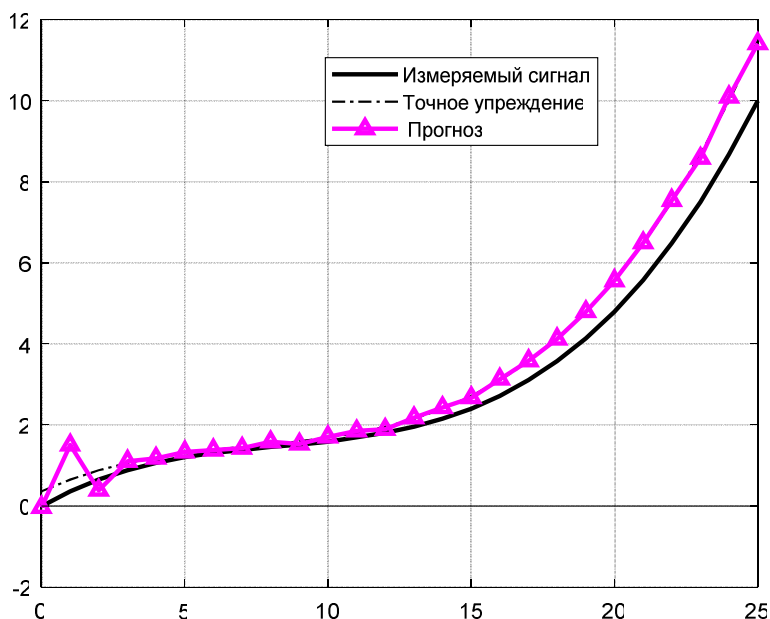


Рис. 2. Действие предиктора для периода упреждения $\tau = 1$

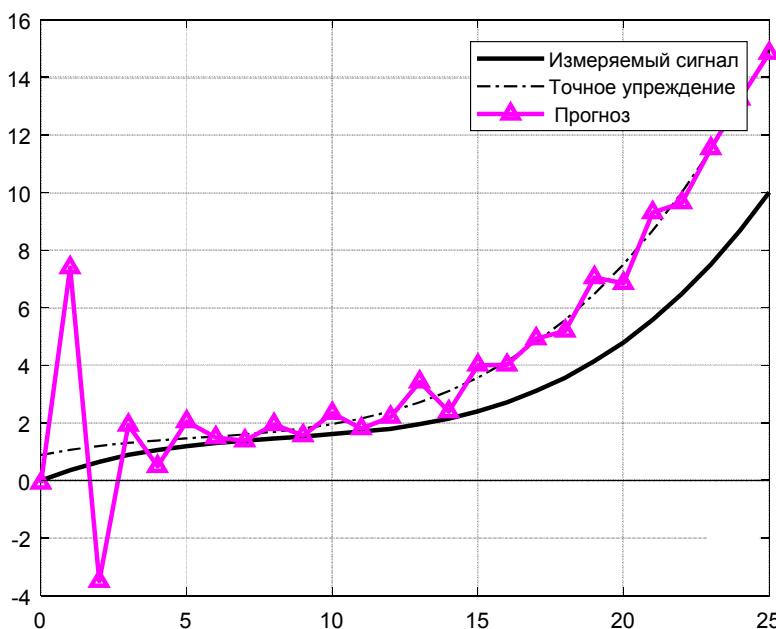


Рис. 3. Действие предиктора для периода упреждения $\tau = 4$

Нейросетевая реализация предиктора

Теоретический и прикладной интерес представляют методы решения задач прогнозирования ВР на основе нейросетевых технологий. В частности, решение данных задач в среде программирования MATLAB можно основывать на использовании функции `newlind` [1] - она создает линейную нейронную сеть, имеющую структуру КИХ-фильтра. Рассмотренные выше

вопросы проясняют механизм действия таких нейросетевых предикторов. Кроме того, посредством обучения нейронной сети возможно получить структуру и параметры модели (2) и далее использовать ее в алгоритмах многошагового прогноза.

Список литературы

1. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Выпуск 1: Прогноз и управление. – М.: Мир, 1974. – 406 с.
2. Kirchgässner G., Wolters J., Hassler U. Introduction to Modern Time Series Analysis. Springer, 2013. – 325 p.
3. Медведев В.С., Потемкин В.Г. Нейронные сети. MATLAB 6 – М.: Диалог-МИФИ, 2002. – 495 с.
4. Morariu N., Iancu E., Vlad S. A neural network model for time series forecasting // Romanian Journal of Economic Forecasting. 2009. No. 4. – P.213-223.

References

1. Box G.E.P., Jenkins G.M. Time series analysis. Issue 1. Forecasting and control. Moscow, MIR, 1974. - 406 p.
2. Kirchgässner G., Wolters J., Hassler U. Introduction to Modern Time Series Analysis. Springer, 2013. - 325 p.
3. Medvedev V.S., Potemkin V.G. Neural networks. MATLAB 6. Moscow: DIALOGUE-MIFI, 2002. – 495 p.
4. Morariu N., Iancu E., Vlad S. A neural network model for time series forecasting // Romanian Journal of Economic Forecasting. 2009. No. 4. - P. 213-223.

Филимонов Александр Борисович – доктор технических наук, профессор, filimon_ab@mail.ru	Filimonov Alexandr Borisovich – doctor of technical sciences, professor, filimon_ab@mail.ru.
Рашиди Алашти Ходжатоллах – аспирант, rsh_hojat@yahoo.com	Rashidi Alashty Hojatollah – postgraduate, rsh_hojat@yahoo.com
Московский авиационный институт (Национально исследовательский университет, Москва, Россия)	Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

Received 04.04.2019