

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Бойко Л.А., Ксендзенко Л.С.

Ключевые слова: структурно-неоднородная среда, статистическая краевая задача, модельное поле структуры, температурные напряжения, нормальное и логарифмически нормальное распределения.

Аннотация. На основе теоретических методов статистической механики композитных материалов и аналитических методов решения статистической краевой задачи, а также математического моделирования и программирования в математическом пакете MathCAD изложен метод расчета температурных напряжений в структурно-неоднородной среде. На примере структуры асфальтобетона как двухкомпонентного композита получены законы распределения нормальных температурных напряжений для каждой компоненты.

LAWS OF DISTRIBUTION OF NORMAL TEMPERATURE STRESSES IN STOCHASTICALLY INHOMOGENEOUS MEDIUM

Boyko L.A., Ksenzenko L.S.

Keywords: structurally inhomogeneous body, statistical boundary-value problem, numerical experiment, temperature stresses, Gaussian distribution.

Abstract. Based on the theoretical methods of statistical mechanics, analytical methods for solving the statistical boundary value problem, mathematical modeling, and programming methods, the laws of temperature stress distribution in a structurally inhomogeneous body are constructed in the MathCad mathematical package. The example of asphalt concrete shows the log-normal distribution of normal temperature stresses for inclusion and the Gaussian distribution for normal temperature stresses of the binder.

Введение

Проблемой расчета температурных напряжений в структурно-неоднородных средах со случайным расположением структурных элементов занимались еще в прошлом веке, когда закладывались основы такого раздела механики твердого тела, как статистическая механика композитных материалов. Так в статье Ставрова В.П. и Величко А.П. [4] вычислены средние значения температурных и усадочных напряжений в компонентах композита с хаотической неоднородной структурой. Расчет проводился в моментных функциях относительно случайной структуры и свойств среды. При этом, как отмечается в работе [2], накладывались ограничения на вид координатной зависимости моментных функций свойств, в частности, модулей упругости, т.е. по существу, на структуру материала.

Переход к расчету температурных напряжений в стохастически неоднородной среде с учетом влияния элементов неоднородности на напряженно-деформированное состояние непосредственно осуществлен в основополагающем труде [2]. Метод, предложенный авторами этой работы, называется методом реализаций и распространяется на реальную структуру рассматриваемой стохастически неоднородной среды, которую можно получить либо опытным путем, обрабатывая реальный материал, либо, что

гораздо проще, создавая математическую модель, с использованием специальной программы.

В последние годы вышли работы [1,3], в которых исследуются температурные напряжения в структурно-неоднородных средах типа стекловолокнистого композита и асфальтобетонного дорожного покрытия. И в том, и в другом случае ставится и решается статистическая краевая задача механики композитов, решение осуществляется методом реализаций.

Рассмотрим двухкомпонентную среду, каждая из компонент которой имеют модуль упругости $\theta(x)$ и коэффициент линейного расширения $\alpha(x)$. Поскольку структура среды стохастична, то величины $\theta(x)$, $\alpha(x)$ образуют однородные эргодические случайные поля. Предполагается, что в каждой компоненте модуль упругости и коэффициент линейного расширения являются постоянными величинами, но случайным событием является попадание точки, в которой вычисляется напряжение, в ту или иную компоненту. Введем индикаторную функцию k -ой компоненты $\lambda_k(x)$, которая равна 1, если точка принадлежит k -ой компоненте и равна нулю в противном случае. Тогда в любой точке среды x модуль упругости и коэффициент линейного расширения можно записать в виде:

$$\theta(x) = \sum_{k=1}^n \theta_k \lambda_k(x), \quad \alpha(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k(x), \quad \text{где } \theta_k, \alpha_k \text{ модуль упругости и коэффициент линейного расширения } k\text{-ой компоненты, } n - \text{общее число компонент.}$$

Рассмотрим статистическую краевую задачу термоупругости среды с модулем упругости $\theta(x)$ при отсутствии объемных сил и при детерминированных перемещениях границы S тела V :

$$\nabla \cdot \sigma = 0, \quad \varepsilon = \text{def } \bar{\chi}, \quad \sigma = C \cdot (\varepsilon - \alpha t), \quad \bar{\chi}^0(\bar{x})|_S = 0. \quad (1)$$

Здесь σ , ε , $\bar{\chi}$ – случайные напряжения, деформации и перемещения соответственно; ∇ – дифференциальный оператор Гамильтона; $\bar{\chi}^0(\bar{x}) = \bar{\chi}(\bar{x}) - \langle \bar{\chi}(\bar{x}) \rangle$, где $\langle \dots \rangle$ – среднее значение случайной величины; t – детерминированная разность температур ненапряженного состояния и состояния эксплуатации; $\text{def} = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^*)$. Звездочка означает

транспонирование, две точки означают свертку тензоров. С-детерминированный тензор модулей упругости. Для трансверсально изотропной среды с изотропными компонентами, известен тензор Грина $G(\bar{x}, \bar{x}')$, который приведен в работе [2]. Будем решать задачу (1) методом функций Грина, преобразуя систему (1) в интегро-дифференциальные уравнения относительно флуктуаций деформаций:

$$\varepsilon_1^0(\bar{x}) = \text{def} \int_V G(\bar{x}, \bar{x}') \cdot (\nabla \cdot \theta^0 \cdot \mathbf{e})' dV'. \quad (2)$$

Здесь $\theta^0 = \theta - \langle \theta \rangle$, $e(\bar{x}) = \langle \varepsilon(\bar{x}) \rangle$. Считая средние значения деформаций постоянными, ($e(\bar{x}) = \text{const}$ в области), представим флуктуации модулей упругости в виде суммы произведений модулей упругости компонент и индикаторной функции, введенной выше. Таким образом, в формуле (2) появится функция, характеризующая геометрию структуры. Опуская громоздкие выкладки, имеющиеся в монографии [2], приведем расчетную формулу для вычисления нормальных температурных напряжений в компонентах:

$$P_{11}^{(s)} = \left\{ 2 \left(l^{(s)} + m^{(s)} \right) a_{11}^0 + m^{(s)} a_{33}^0 + \left[\left(l^{(s)} + 2m^{(s)} \right) I_{11\alpha\alpha} + 3m^{(s)} I_{22\alpha\alpha} \right] \cdot \left[2 \left(l^* + m^* \right) a_{11}^0 + m^* a_{33}^0 \right] - 3k^{(s)} a^{(s)} \right\} \cdot t. \quad (3)$$

Здесь индекс s принимает значения 1,2. Цифра 1 указывает на принадлежность рассматриваемой точки первой компоненте. Цифра 2 означает принадлежность точки второй компоненте; l, m – постоянные Ламе с соответствующими индексами, a_{ij}^0 – макроскопические коэффициенты линейного расширения данной неоднородной среды; l^*, m^* – приведенные постоянные Ламе, которые вычисляются по формулам: $l^* = pl^{(1)} + (l - p)l^{(2)}$, $m^* = pm^{(1)} + (l - p)m^{(2)}$, где p – процентное содержание наполнителя в композите; t – детерминированная разность температур ненапряженного состояния и эксплуатации; $k^{(s)}, a^{(s)}$ – модули объемной деформации и коэффициенты линейного расширения компонент. Свертки тензоров $I_{11\alpha\alpha}, I_{22\alpha\alpha}$ для среды с круговой формой включений представлены в [2]. Для их вычисления необходимы производные тензора Грина, компоненты которого для плоского случая имеют вид:

$$G_{ij}(\bar{x}, \bar{x}') = M \ln r + N \frac{(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)}{r^2}, \quad (i, j = 1, 2),$$

$$\text{где } M = -\frac{l + 3m}{4\pi m(l + 2m)}, \quad N = -\frac{l + m}{4\pi m(l + 2m)}, \quad r^* = \sqrt{(x_i - x'_i)^2 + (x_j - x'_j)^2}$$

Здесь l, m – средние значения постоянных Ламе; $r = |\bar{x} - \bar{x}'|$, где $\bar{x}, \bar{x}'$ – радиус-векторы двух точек рассматриваемой среды.

В качестве примера стохастически неоднородной среды рассмотрим асфальтобетонное дорожное покрытие, толщина которого изменяется в пределах 7,5-10 см. В плоскости, параллельной основанию дорожного полотна, это стохастически неоднородная двухкомпонентная композитная среда. Ее компоненты черный щебень (наполнитель) и дорожный битум (связующее) – являются изотропными средами и вплоть до разрушения деформируются упруго. Механические свойства компонент: модули упругости, коэффициенты Пуассона и коэффициенты линейного расширения

приведены ниже. Требования к форме щебня таковы, что в идеале это должны быть одинаковые по размеру кубы (размеры кубов варьируются в зависимости от фракции щебня). Для простоты заменим их сферами. Коэффициент заполнения возьмем равным 0,6. Будем считать, что при переходе через границу раздела сред напряжения изменяются непрерывно. Модельное поле структуры представлено на рис. 1а, где точка x взята в начале координат, а точка x' принадлежит контуру наполнителя (рис. 1б). Температурные напряжения вычисляем в произвольных точках среды, причем индикаторная функция позволяет разделить точки наполнителя и связующего.

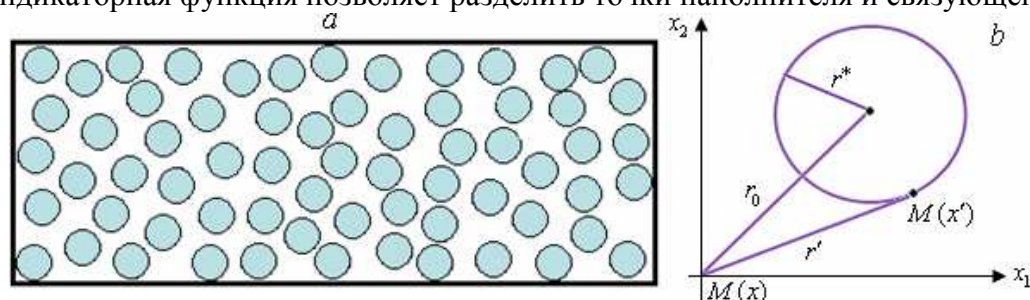


Рис. 1. Образец модельного поля структуры асфальтобетона – а; сечение произвольного включения горизонтальной плоскостью – б

Результаты и выводы

Расчет значений нормальных температурных напряжений проведен при следующих значениях параметров: значения модулей Юнга $E^{(1)} = 0,5 \cdot 10^9 \text{ н/м}^2$, $E^{(2)} = 0,11 \cdot 10^9 \text{ н/м}^2$; коэффициентов Пуассона $\nu^{(1)} = 0,22$; $\nu^{(2)} = 0,25$; коэффициентов линейного расширения компонентов $\alpha^{(1)} = 0,3 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$; $\alpha^{(2)} = 30 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$; значения процентного содержания наполнителя в композите $p = 0,6$; $t = 20^\circ\text{C}$.

На основе расчетов, выполненных по формуле (3), с использованием математического пакета MathCAD, получены значения нормальных температурных напряжений для наполнителя и связующего, а затем проведена их статистическая обработка. Получены кривые распределения искомых величин (рис. 2).

Вид гистограммы относительных частот (рис. 2а) позволяет выдвинуть гипотезу о том, что изучаемая непрерывная случайная величина – напряжение в наполнителе, подчиняется логарифмически нормальному закону.

Для связующего распределения нормальных температурных напряжений подчиняется нормальному закону (рис. 2б). Справедливость выдвинутых гипотез проверена с помощью критерия согласия χ^2 с уровнем значимости $\alpha = 0,05$.

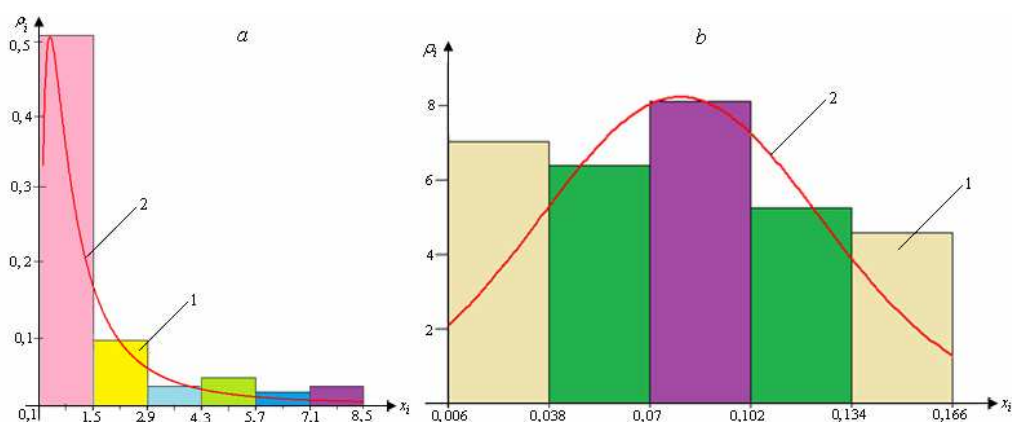


Рис. 2. Гистограмма относительных частот значений натуральных логарифмов напряжений в наполнителе – 1(a); график плотности логнормального распределения напряжений в наполнителе – 2(a). Гистограмма относительных частот значений напряжений в связующем – 1(b); график плотности нормального распределения напряжений в связующем – 2(b)

Результаты статьи важны при выборе оптимальной структуры изучаемого композитного материала и согласуются с данными, полученными в [2] о распределении температурных напряжений в компонентах неоднородных сред с включениями круглой формы. На основании изложенных выше модельных и аналитических исследований, можно сделать следующие выводы:

1) асфальтобетонный слой представляет собой композитную среду, и его структура моделируется кусочно-однородной непрерывной средой, удовлетворяющей требованиям статистической модели. Для такой среды можно поставить и решить статистическую краевую задачу термоупругости механики композитов;

2) методы решения статистических краевых задач термоупругости механики композитов применимы к модели асфальтобетона. При этом в решении необходимо учитывать механические характеристики компонент асфальтобетона;

3) полученное решение позволяет найти численные значения температурных напряжений в компонентах, отдельно в наполнителе и в связующем, провести статистическую обработку результатов; в пределах климатических температур распределение температурных напряжений согласуется с общей картиной распределения температурных напряжений в композитных средах; варьирование значений параметров задачи позволит получить кривые распределений для соответствующих климатических условий, с различными видами наполнителя и связующего.

Список литературы

1. Бойко Л.А., Ксендзенко Л.С., Василенко Н.Ю., Баева Т.А. Зависимость температурных напряжений в компонентах стекловолокнистого

композита от процентного содержания стеклянных волокон в материале // Вестник Инженерной школы ДВФУ. 2013. № 4 (17). С. 76-81.

2. Волков С.Д., Ставров В.П. Статистическая механика композитных материалов. – Минск: Изд-во БГУ им. Ленина, 1978. – 205 с.
3. Лаврушина Е.Г., Бойко А.А. Распределение температурных напряжений в дорожных покрытиях // Строительные материалы. 2009. №11. С. 74-75.
4. Ставров В.П., Величко А.П. Начальные напряжения в наполненных и армированных полимерах // Механика композитов. 1973, т.90.

References

1. Boyko L.A., Ksendzenko L.S., Vasilenko N.Yu., Baeva T.A. The dependence of temperature stresses in the components of a fiberglass composite on the percentage of glass fibers in the material // Bulletin of the Engineering School of FEFU. 2013. No. 4 (17). P. 76-81.
2. Volkov S.D., Stavrov V.P. Statistical mechanics of composite materials. – Minsk: Publ. house of BSU, 1978. – 205 p.
3. Lavrushina E.G., Boyko L.A. Distribution of temperature stresses in pavements // Construction material. 2009. №11. P. 74-75.
4. Stavrov V.P., Velichko A.P. Initial stresses in filled and reinforced polymers // Composites Mechanics. 1973, vol. 90.

Бойко Людмила Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры механики и математического моделирования, boyko.la@dvfu.ru	Boyko Ludmila Aleksandrovna – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Department of mechanics and mathematical modeling, boyko.la@dvfu.ru
Ксендзенко Людмила Степановна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры алгебры, геометрии и анализа, ksendzenko@mail.ru	Ksendzenko Lyudmila Stepanovna – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Department of algebra, geometry and analysis, ksendzenko@mail.ru
Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия	Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia

Received 12.09.2019