

ПРОЕКТИРОВАНИЕ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ С ЗАДААННЫМИ ЧАСТОТАМИ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Бохонский А.И., Варминская Н.И., Мозолевская Т.В.

Ключевые слова: упругая система, степени свободы, заданные собственные частоты, переносное движение, достижение абсолютного покоя.

Аннотация. На примерах упругих систем с двумя и тремя степенями свободы иллюстрируется алгоритм выбора таких геометрических и физических параметров, при которых система с конечным числом степеней свободы обладает заданными частотами собственных колебаний. Показано, что при оптимальном переносном перемещении систем за минимальное возможное время обеспечивается подавление колебаний к концу движения по всем модам.

DESIGNING AN ELASTIC SYSTEM WITH PRESET EIGENFREQUENCIES

Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I., Mozolevskaya T.V.

Keywords: elastic system, degrees of freedom, preset eigenfrequencies, carry over motion, absolute quiescency.

Abstract. The examples of elastic systems with two and three degrees of freedom illustrate the algorithm of choosing geometric and physical parameters that provide preset eigenfrequencies to elastic system with a finite number of degrees of freedom. It is shown that oscillations suppression at the end of the motion in all modes for the minimum possible time is provided for systems optimal carry over motion.

Введение. Основам теории упругих колебаний линейных систем посвящена обширная литература [1-8]. Достигнутый уровень позволил решить многие актуальные задачи колебаний машин и сооружений, перейти к практической реализации методов и алгоритмов управления колебаниями упругих систем, активному (управляемому) подавлению колебаний. Важным этапом в совершенствовании моделей колебательных систем явилась работа [8], в которой обращается внимание на ряд ошибок и парадоксов в описании колебаний упругих систем.

С развитием робототехники, мехатронных систем возникла необходимость в решении задач управляемого переносного поступательного и вращательного движения объектов конечной жесткости с учетом порождаемых быстрым движением колебательных процессов.

Ряд публикаций [9-14] посвящен решению полных обратных задач вариационного исчисления – конструированию оптимальных движений упругих систем.

В работе [13] исследовано управление переносным поступательным движением системы с заранее заданными (проектируемыми) частотами собственных колебаний при движении из исходного в конечное состояние абсолютного покоя за минимально возможное время. Объектом исследования была система с тремя степенями свободы, представляющая собой

сосредоточенные массы, соединенные пружинами. Важно отметить, что выбранное оптимальное управление переносным движением позволило подавить упругие колебания по всем модам к концу движения.

Цель дальнейших исследований – применение алгоритма проектирования с задаваемыми частотами новых типов упругих систем, их оптимальное переносное движение.

Алгоритм решения включает две процедуры. *Первая* – проектирование упругой системы с заданными частотами как исходными данными. При известной части геометрических и физических параметров проектируемой системы другие параметры находятся из системы нелинейных алгебраических уравнений, которая образуется приравниванием коэффициентов частотных полиномов: согласно исходной системе дифференциальных уравнений и сопряженного полинома, представленного в виде разложения на множители с учетом задаваемых частот, отличающимися друг от друга в целое число раз. *Вторая* – оптимальное переносное движение.

Реализация алгоритма иллюстрируется на примерах.

Пример 1.

Реализация алгоритма проектирования объекта с заданными частотами собственных колебаний на простом примере упругой системы в виде консольного стержня с двумя степенями свободы, изображенного на рис. 1.

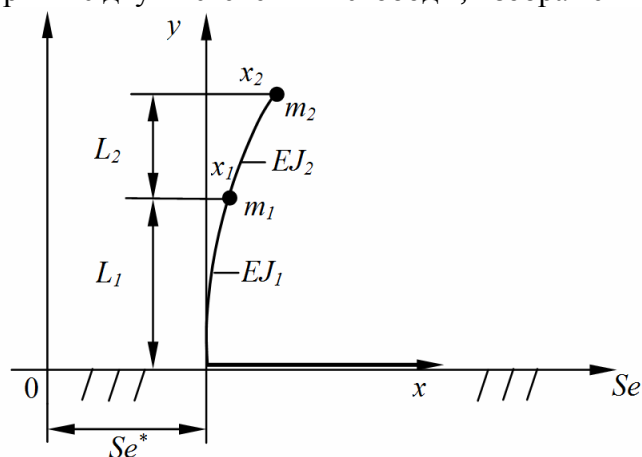


Рис. 1. Упругая система

Объект участвует в двух движениях: переносном $Se(t)$ и относительном с координатами $x_1(t)$, $x_2(t)$. Дифференциальные уравнения свободных колебаний без учета сопротивления, записанные с учетом независимости действия сил и принципа Даламбера:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\delta_{11}m_1\ddot{x}_1 - \delta_{12}m_2\ddot{x}_2; \\ x_2 &= -\delta_{21}m_1\ddot{x}_1 - \delta_{22}m_2\ddot{x}_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где m_1 , m_2 – сосредоточенные массы; δ_{11} , δ_{12} , δ_{21} , δ_{22} ($\delta_{21} = \delta_{12}$) – удельные перемещения сосредоточенных масс; $\ddot{x}_1$, $\ddot{x}_2$ – ускорения.

С использованием интеграла Мора удельные перемещения вычисляются следующим образом:

$$\delta_{11} = \frac{L_1^3}{3EJ_1}; \delta_{12} = \frac{L_1^2}{2EJ_1}(L_1 + 2/3 L_1); \delta_{22} = \frac{(L_2^2 L_1 + L_1^3/3)}{EJ_1} + \frac{L_2^3}{3EJ_1}, \quad (2)$$

где L_1, L_2 – расстояния между массами; E – модуль упругости 1 рода; J_1, J_2 – осевые моменты инерции поперечных сечений стержня соответственно на первом и втором участках.

С целью упрощения трудоемких аналитических вычислений принято: $L_1 = L_2 = L$. Теперь удельные перемещения (2) принимают вид:

$$\delta_{11} = \frac{L^3}{3EJ}; \delta_{12} = \frac{5L^3}{6EJ}; \delta_{22} = \frac{5L^3}{3EJ}. \quad (3)$$

Частотный определитель с учетом обозначений $a_1 = m_1 \cdot \delta_{11}, a_2 = m_2 \cdot \delta_{12}, a_3 = m_1 \cdot \delta_{21}, a_4 = m_2 \cdot \delta_{22}$

$$\begin{vmatrix} a_1 k^2 - 1 & a_2 k^2 \\ a_3 k^2 & a_4 k^2 - 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (4)$$

из которого, после преобразований, следует полином для исходной системы:

$$k^4 - \frac{a_1 + a_4}{a_1 a_4 - a_2 a_3} \cdot k^2 + \frac{1}{a_1 a_4 - a_2 a_3} = 0. \quad (5)$$

Сопряженный с (5) полином конструируется в виде разложения на множители, где k_1^2 и k_2^2 – квадраты задаваемых частот собственных колебаний, то есть

$$(k^2 - k_1^2)(k^2 - k_2^2) = 0, \quad (6)$$

который принимает вид:

$$k^4 - (k_1^2 + k_2^2)k^2 + k_1^2 k_2^2 = 0. \quad (7)$$

Приравнявая коэффициенты полиномов (5) и (7), получим следующую систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$U_1 = -\frac{a_1 + a_4}{a_1 a_4 - a_2 a_3} + k_1^2 + k_2^2 = 0, \quad U_2 = \frac{1}{a_1 a_4 - a_2 a_3} - k_1^2 k_2^2 = 0. \quad (8)$$

При заданных частотах собственных колебаний k_1, k_2 и некоторым другим геометрическим и физическим параметрам из (8) находятся два параметра, при которых система обладает собственными частотами k_1 и k_2 . Наиболее естественно находить осевые моменты инерции поперечных сечений стойки на двух участках, которые для сплошного поперечного сечения равны: $J_1 = \frac{\pi d_1^4}{64}, J_2 = \frac{\pi d_2^4}{64}$. С их использованием находятся диаметры круглых сечений стойки.

Если непосредственно находить диаметры, то трудоемкость поиска решения возрастает в связи с существенно нелинейными свойствами системы уравнений.

Численный пример. Исходные данные: $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па, $k_1 = 40 \text{ с}^{-1}$, $k_2 = 320 \text{ с}^{-1}$, $L_1 = L_2 = 1 \text{ м}$, $m_1 = 400 \text{ кг}$, $m_2 = 50 \text{ кг}$. Найти: J_1 , J_2 .

Система уравнений (8), после преобразований, принимает вид:

$$\begin{aligned} 9 \cdot 10^6 J_1 J_2 + 75 \cdot 10^4 J_2^2 - 117 J_2 - 52 J_1 &= 0; \\ 439453125000 \cdot J_1^2 J_2 + 9 J_2 - 4 J_1 &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Отметим, что выполняется условие: $-9J_2 + 4J_1 > 0$. Получены следующие корни системы (9): $J_1 = 0,67409 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$; $J_2 = 1,34424 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4$.

Итак, периоды собственных колебаний равны $T_1 = 0,15708 \text{ с}$, $T_2 = 0,019634 \text{ с}$; $T_1/T_2 = 8$. В качестве переносного управления в виде «разгон – торможение» (ускорения на единицу массы) принята функция

$$U_e = B \sin pt, \quad (10)$$

где $B = \frac{S_* p^2}{2\pi}$; S_* – максимальное перемещение (в численном примере $S_* = 1 \text{ м}$); $p = k_1/n$, $n = 10$.

В результате интегрирования (10) с учетом краевых условий получены зависимости:

$$U_e(t) = \frac{S_* p^2}{2\pi} \sin pt; \quad V_e(t) = \frac{S_* p}{2\pi} (1 - \cos pt); \quad S_e(t) = \frac{S_*}{2\pi} (pt - \sin pt).$$

Для принятых исходных данных $S_* = 1 \text{ м}$, $T = 1,57 \text{ с}$, $p = 4 \text{ с}^{-1}$ графики ускорения переносного движения (управления), скорости и перемещения изображены на рисунке 2.

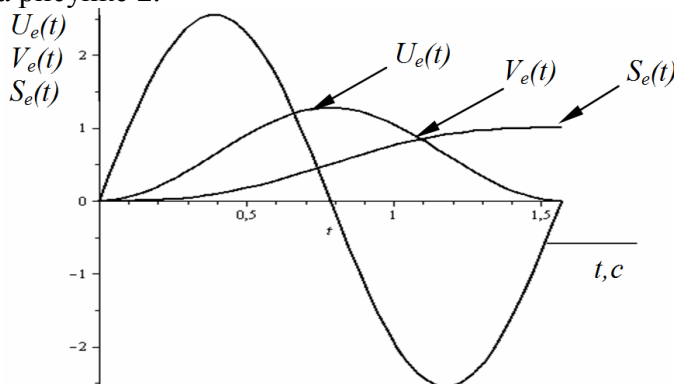


Рис. 2. Графики переносного движения

Система дифференциальных уравнений (1) становится неоднородной:

$$\begin{aligned} x_1 + \delta_{11} m_1 \ddot{x}_1 + \delta_{12} m_2 \ddot{x}_2 &= -\delta_{11} m_1 U_e(t); \\ x_2 + \delta_{21} m_1 \ddot{x}_1 + \delta_{22} m_2 \ddot{x}_2 &= -\delta_{21} m_2 U_e(t). \end{aligned} \quad (11)$$

После подстановки частных решений $x_1^* = D_1 \sin pt$, $x_2^* = D_2 \sin pt$, из полученной системы алгебраических уравнений следует: $D_1 = -0,00025$; $D_2 = -0,0016$.

Общее решение неоднородной системы (11) записывается в виде:

$$x_1 = C_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + C_2 \sin(k_2 t + \alpha_2) + D_1 \sin pt;$$

$$x_2 = C_1 v_{21} \sin(k_1 t + \alpha_1) + C_2 v_{22} \sin(k_2 t + \alpha_2) + D_2 \sin pt;$$

$$V_1 = \frac{dx_1}{dt}; \quad V_2 = \frac{dx_2}{dt}.$$

Коэффициенты мод колебаний находятся согласно зависимостям:

$$v_1 = v_{12} = 1; \quad v_{21} = \frac{1 - k_1^2 m_1 \delta_{11}}{k_1^2 m_1 \delta_{12}}; \quad k_{22} = \frac{1 - k_2^2 m_1 \delta_{11}}{k_2^2 m_1 \delta_{22}}.$$

Произвольные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 найдены с учетом начальных условий, свидетельствующих о движении из состояния покоя: $x_1(0) = 0; x_2(0) = 0; \dot{x}_1(0) = 0; \dot{x}_2(0) = 0$. Графики $x_1(t), x_2(t)$ изображены на рисунке 3; графики $\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)$ совмещены и изображены на рисунке 4. Принятое отношение

собственных частот ($n=8$) позволило за время движения $T = \frac{2\pi}{p} = 1,57c$ достичь абсолютного покоя с учетом двух мод колебаний.

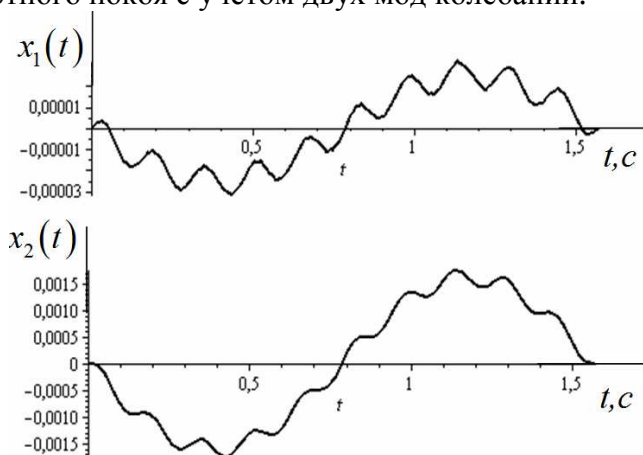


Рис. 3. Графики относительных перемещений $x_1(t), x_2(t)$

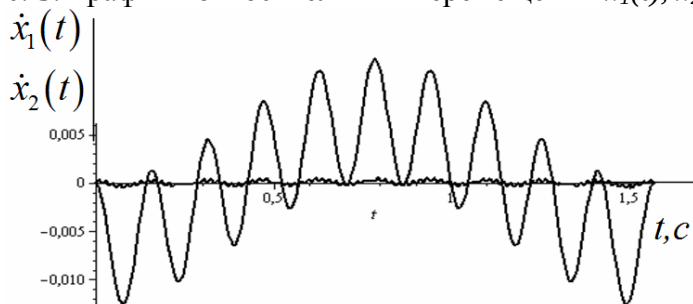


Рис. 4. Графики относительных скоростей $\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)$

Пример 2. Система с тремя степенями свободы (рис. 5). Удельные перемещения, вычисленные с использованием интеграла Мора:

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{L_1^3}{3EJ_1}; \quad \delta_{12} = -\frac{L_1^2(L_2 + 2/3L_1)}{2EJ_1}; \quad \delta_{13} = -\frac{L_1^2}{2EJ_1} \left(L_2 + L_3 + \frac{2L_1}{3} \right); \quad \delta_{22} = \frac{L_2^2 \cdot L_1 + L_1^3/3}{EJ_1} + \frac{L_2^3}{3EJ_2}; \\ \delta_{33} &= \frac{L_1(L_2 + L_3)^2 + L_1^3/3}{EJ_1} + \frac{L_2^2 \cdot L_2 + L_2^3/3}{EJ_2} + \frac{L_3^3}{3EJ_3}; \\ \delta_{23} &= \frac{1}{EJ_1} \left\{ L_1 L_2 \left(L_2 + L_3 + \frac{L_1}{2} \right) + \frac{L_1^2}{2} \left(L_2 + L_3 + \frac{2L_1}{3} \right) \right\} + \frac{L_2^2}{2EJ_2} \left(L_3 + \frac{2L_2}{3} \right).\end{aligned}\quad (12)$$

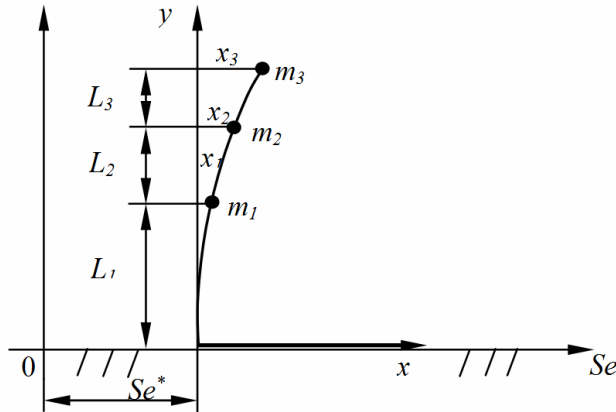


Рис. 5. Движение упругой системы с тремя степенями свободы

Исключая из (12) параметры J_3 и L_3 , получим выражения для удельных перемещений (2), которые использовались в **Примере 1**.

Система алгебраических уравнений для определения параметров L_1 , L_2 , L_3 , при которых обеспечиваются задаваемые частоты собственных колебаний k_1 , k_2 , k_3 , существенно не линейна, весьма громоздка и поэтому здесь не приводится. С целью повышения точности вычислений и сходимости итерационной процедуры в качестве неизвестных были приняты сосредоточенные массы m_1 , m_2 , m_3 .

Численный пример. Исходные данные: $L_1=2,5\text{м}$; $L_2=L_3=1\text{м}$; $J_1=J_2=J_3=10^{-6}\text{м}^4$; Задаваемые частоты: $k_1=20\text{ с}^{-1}$; $k_2=k_3=100\text{ с}^{-1}$. Ответ: $m_1=17,4\text{кг}$; $m_2=2,22\text{кг}$; $m_3=40,02\text{кг}$.

Естественно, что физическому смыслу задачи соответствуют положительные значения масс.

Выводы. Как и следовало ожидать, при переносном движении упругой системы с конечным числом степеней свободы, у которой заданные частоты собственных колебаний отличаются в целое число раз, обеспечивается устранение колебаний к концу движения по всем модам.

1. Задача поиска значений геометрических или физических параметров упругой системы с заданными частотами собственных колебаний не имеет единственного решения. С повышением числа степеней свободы разрешающие уравнения становятся чрезвычайно громоздкими; решение существенно нелинейной системы сопряжено с известными трудностями при реализации итерационных процедур поиска корней.

2. Несмотря на трудоемкость аналитических вычислений, не исключается наиболее общая постановка задачи о минимизации массы упругой системы (например, руки манипулятора) с заданными частотами, с учетом ограничений по прочности и жесткости.

Список литературы

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко, Д.Х. Янг, У. Уивер. – М.: Наука, 1985. – 496 с.
2. Бернштейн С.А. Основы динамики сооружений. – М.: Госстройиздат, 1938. – 160 с.
3. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. – Л.: Машиностроение, 1976. – 320 с.
4. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1972. – 416 с.
5. Василенко Н.В. Теория колебаний. – К.: Вища школа, 1992. – 430 с.
6. Светлицкий В.А. Сборник задач по теории колебаний / В.А. Светлицкий, И.В. Стасенко. – М.: Высшая школа, 1973. – 456 с.
7. Карновский И.А. Методы оптимального управления колебаниями деформируемых систем / И.А. Карновский, Ю.И. Почтман. – К.: Вища школа, 1982. – 116 с.
8. Пановко Я.Г. Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки / Я.Г. Пановко, И.И. Губанова. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
9. Бохонский А.И. Оптимальное управление переносным движением деформируемых объектов: теория и технические приложения / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская, М.И. Мозолевский. Под общ. ред. А.И. Бохонского. – Севастополь: Изд-во Сев ГТУ, 2007. – 296 с.
10. Бохонский А.И. Вариационное и реверсионное исчисления в механике: монография / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская. – Севастополь: СевНТУ, 2012. – 212 с.
11. Бохонский А.И. Актуальные задачи вариационного исчисления. – Германия: Palmarium Academic Publishing, 2013. – 77 с.
12. Бохонский А.И. Реверсионный принцип оптимальности / А.И. Бохонский. – М.: Вузовский учебник: ИНФРА-М, 2016. – 174 с.
13. Бохонский А.И. Управление движением системы с заданными частотами / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская, Т.В. Мозолевская // Механика, автоматика и робототехника. – 2018. – №2. – С.7-13.
14. Бохонский А.И. Энергоемкость управления перемещением объектов // Фундаментальные основы механики. – 2017. – №2. – С. 38-41.

References

1. Timoshenko S.P. Oscillations in engineering/ S.P. Timoshenko, D.H. Yang, U. Uiver. – M.: Science, 1985. – 496 p.

2. Bernshtein S.A. Fundamentals of structure dynamics. – M.: Gosstroizdat, 1938. – 160 p.
3. Panovko Ya.G. fundamentals of applied theory of vibrations and shock. – L.: Mechanical Engineering, 1976. – 320 p.
4. Biderman V.L. Applied theory of mechanical vibrations. – M.: High school, 1972. – 416 p.
5. Vasilenko N.V. Theory of oscillations. – K.: High school, 1992. – 430 p.
6. Svetlicky V.A. Collection of problems on the theory of oscillations / V.A. Svetlicky, I.V. Stasenko. – M.: High school, 1973. – 456 p.
7. Karnovsky I.A. Methods of optimal control of vibrations of deformable systems / I.A. Karnovsky, Yu.I. Pochtman. – K.: Vishcha shkola, 1982. – 116 s.
8. Panovko Ya.G. Stability and oscillations of elastic systems. Modern concepts, paradoxes and errors / Ya.G. Panovko, I.I. Gubanova. – M.: Science, 1979. – 384 p.
9. Bokhonsky A.I. Optimal control of a portable motion deformable objects: theory and technical applications / A.I. Bokhonsky, N.I. Varminskaya, M.I. Mozolevskii. Under total ed. A.I. Bokhonsky. – Sevastopol: Publ. house SevSTU, 2007. – 296 p.
10. Bokhonsky A.I. Variational and reversion calculus in mechanics: monograph / A.I. Bokhonsky, N.I. Varminskaya. – Sevastopol: SevNTU, 2012. – 212 p.
11. Bokhonsky A.I. Actual problems of the calculus of variations. – Germany: Palmarium Academic Publishing, 2013. – 77p.
12. Bokhonsky A.I. Reversional the optimality principle. – M.: Vuzovskij University textbook: INFRA-M, 2016. – 174 p.
13. Bokhonsky A.I. Traffic control system with preset frequencies / A.I. Bokhonsky, N.I. Varminskaya, T.V. Mozolevskaya // Mechanics, automation and robotics. – 2018. – №2. – P. 7-13.
14. Bokhonsky A.I. Energy control moving objects // Fundamental principles of mechanics. – 2017. – №2. – P. 38-41.

Бохонский Александр Иванович – доктор технических наук, профессор, Севастопольский государственный университет, г. Севастополь, Россия, bohon.alex@mail.ru	Bokhonsky Alexander Ivanovich – doctor of technical sciences, professor, Sevastopol State University, Sevastopol, Russia, bohon.alex@mail.ru
Варминская Наталья Ивановна – кандидат технических наук, доцент, Черноморское высшее военно-морской училище им. П.С. Нахимова, г. Севастополь, Россия, nvarminska@gmail.com	Varminskaya Natalia Ivanovna – candidate of technical sciences, associated professor, Black Sea Higher Naval School of P.S. Nakhimov, Sevastopol, Russia, nvarminska@gmail.com.
Мозолева Татьяна Викторовна – кандидат технических наук, доцент, Черноморское высшее военно-морское училище им. П.С. Нахимова, г. Севастополь, Россия, tatyana.tvn@mail.ru	Mozolevskaya Tatyana Viktorovna – candidate of technical sciences, associated professor, Black Sea Higher Naval School of P.S.Nakhimov, Sevastopol, Russia, tatyana.tvn@mail.ru.

Received 09.09.2019