

## ХАРАКТЕРИСТИКИ НАКЛОННО-АРОЧНЫХ ЗУБЬЕВ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПЕРЕДАЧИ

*Шевченко С.В., Муховатый А.А., Кроль О.С.*

**Ключевые слова:** наклонно-арочные зубья, зуборезная головка, коэффициент перекрытия, длина зубьев, параметры зацепления.

**Аннотация.** Представленный материал расширяет возможность исследования цилиндрических зубчатых передач с наклонно-арочными зубьями. Установлена взаимосвязь параметров зацепления с размером зуборезной головки. Определены экстремальные значения углов наклона наклонно-арочных зубьев для заданных основных размеров передачи. Для изучения изгибной прочности зубьев исследуемой передачи получены зависимости для расчета продольной кривизны и длины нарезаемых зубьев.

## CHARACTERISTICS OF INCLINED ARCHED TEETH OF CYLINDRICAL GEAR

*Shevchenko S.V., Muhovaty A.A., Krol O.S.*

**Keywords:** inclined-arched teeth, gear cutting head, overlap coefficient, tooth length, gearing parameters.

**Abstract.** The presented material expands the possibility of studying cylindrical gears with inclined-arched teeth. The relationship of the engagement parameters with the size of the gear cutting head is established. The extreme values of the angle inclination of the inclined-arched teeth are determined for the given basic dimensions of the gear. To study the bending strength of the gear teeth under study, dependences were obtained for calculating the longitudinal curvature and length of the cut teeth.

Цилиндрические зубчатые передачи с наклонно-арочными зубьями (далее – ЦЗПн-а) представляют собой конструктивную модификацию цилиндрических передач с арочными зубьями [1-10]. Исследования ЦЗПн-а, [11-13], описывают некоторые геометро-кинематические характеристики этих передач, а также особенности их зубонарезания.

В настоящей статье изложены результаты дальнейшего исследования ЦЗПн-а, в которых параметры зацепления ЦЗПн-а рассмотрены во взаимосвязи с параметрами зуборезной головки, ее расположением относительно нарезаемого колеса, с учетом ограничительных условий.

Основные параметры ЦЗПн-а:  $[a_w, m_n, b_w, z_1, z_2, \beta]$ , находятся по методике расчета ее ближайшего аналога – цилиндрической зубчатой передачи с косыми зубьями, то есть, из критерия контактной выносливости зубьев, [14]. По этой причине перечисленные параметры зацепления ЦЗПн-а в настоящей статье рассматриваются, как заданные. Одна из особенностей ЦЗПн-а заключается в том, что угол наклона ее зубьев  $\beta$  меняется вдоль ширины зацепления  $b_w$ . Поэтому найденное из указанного критерия работоспособности значение угла  $\beta$  для ЦЗПн-а будет только в среднем сечении ширины зацепления  $b_w$ , то есть, для  $\beta = \beta_n$ , рис. 1. Считаем, что угол

наклона зубьев ЦЗПн-а на одном торце шестерни (колеса) равен нулю, то есть,  $\beta_{\min} = 0$ . При этом, на другом торце шестерни (колеса) угол  $\beta$  принимает максимальное значение, то есть,  $\beta = \beta_{\max}$ .

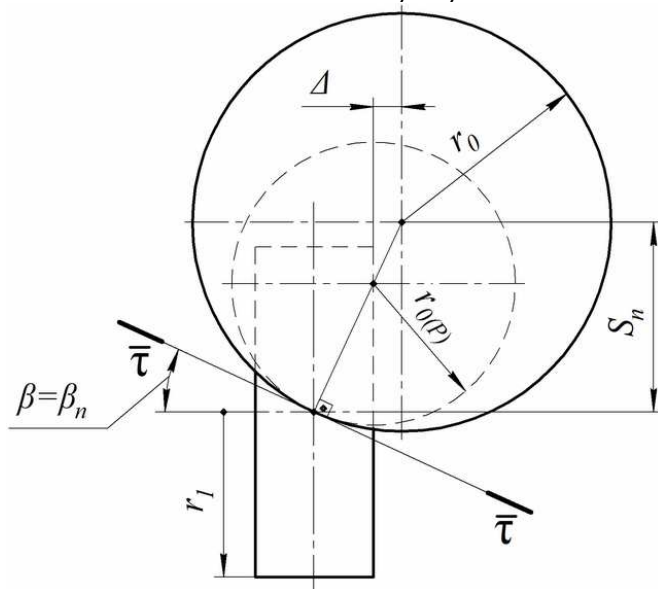


Рис. 1. Угол наклона зубьев  $\beta$  в среднем сечении

Принятое условие  $\beta_{\min} = 0$ , рис. 2, будет выполняться, если ось зуборезной головки располагается на одном из торцов шестерни (колеса).

Для заданных параметров  $\beta_n$  и  $b_w$  расчетный радиус зуборезной головки  $r_{o(P)}$ , обеспечивающий условие  $\beta_{\min} = 0$ , определяется равенством, рис. 2:

$$r_{o(P)} = 0,5 \cdot b_w / \sin \beta_n.$$

По расчетному значению  $r_{o(P)}$  из [1] берется ближайший больший номинальный радиус стандартной зуборезной головки  $r_o = d_o / 2$ , [15]; (в частном случае величины  $r_{o(P)}$  и  $r_o$  могут совпасть).

Дальнейшие расчеты ведутся с использованием стандартного  $r_o$ . Поскольку  $r_o \geq r_{o(P)}$ , центр окружности зуборезной головки с номинальным радиусом  $r_o$  сместиться от правого торца нарезаемой шестерни на величину  $\Delta = r_o \cdot \sin \beta_n - 0,5 \cdot b_w$ , вследствие чего минимальный угол наклона зубьев  $\beta_{\min}$  уже не будет нулевым, рис. 2.

Из рис. 2 следует:

$$\sin \beta_{\min} = \frac{\Delta}{r_o} = \frac{r_o \cdot \sin \beta_n - 0,5 \cdot b_w}{r_o} = \sin \beta_n - 0,5 \cdot b_w / r_o, \text{ откуда}$$

$$\beta_{\min} = \arcsin(\sin \beta_n - 0,5 \cdot b_w / r_o). \quad (1)$$

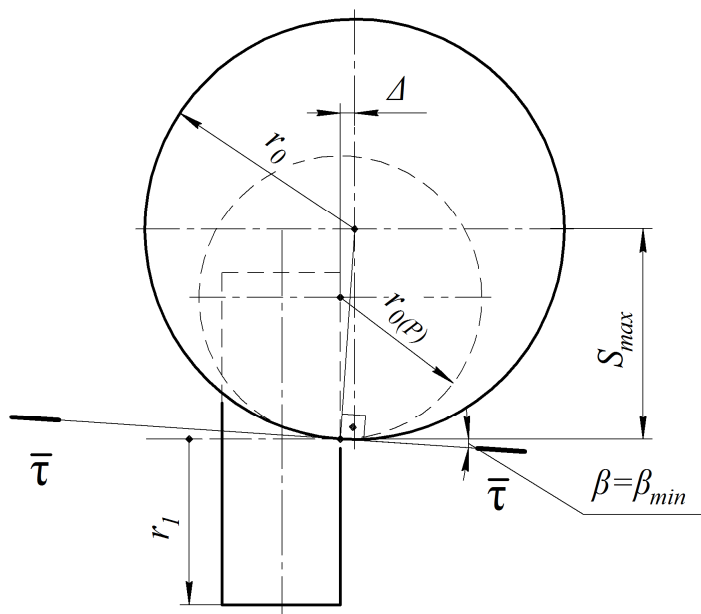


Рис. 2. Минимальный угол наклона зубьев  $\beta_{min}$

Аналогично находится  $\beta_{max}$ , рис. 3:

$$\sin \beta_{max} = \frac{\Delta + b_w}{r_o} = \frac{r_o \cdot \sin \beta_n + 0,5 \cdot b_w}{r_o} = \sin \beta_n + 0,5 \cdot b_w / r_o, \text{ откуда}$$

$$\beta_{max} = \arcsin(\sin \beta_n + 0,5 \cdot b_w / r_o). \quad (2)$$

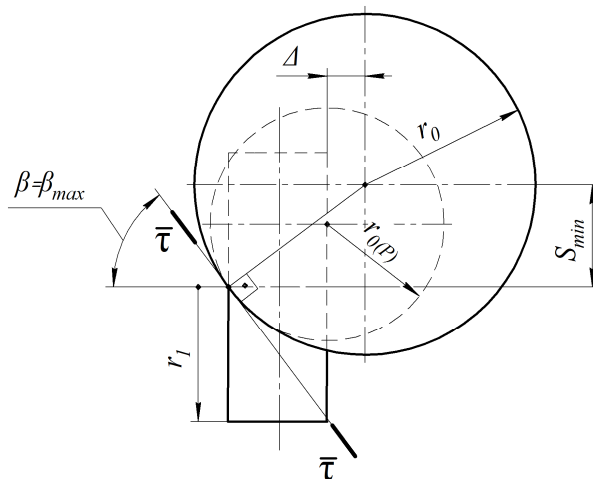


Рис. 3. Минимальный угол наклона зубьев  $\beta_{max}$

Примечание к рисункам 1, 2, 3. Символ  $\bar{\tau}$  обозначает касательную к окружности радиусом  $r_o$  в точке ее пересечения со средним торцовым сечением, правым торцом и левым торцом шестерни соответственно.

Используя уравнение продольной линии наклонно-арочных зубьев [12],

$$\vec{R}_1 = -\vec{i}_1 \cdot r_1 \cdot \cos \varphi - \vec{j}_1 \cdot r_1 \cdot \sin \varphi + \vec{k} \cdot \left( \sqrt{r_o^2 - r_1^2 \cdot \varphi^2} - r_o \cdot \sin \beta_n \right), \quad (3)$$

определим начальный  $\varphi_H$  и конечный  $\varphi_K$  углы поворота шестерни для нарезания одной впадины между двумя соседними зубьями. Для этого достаточно последовательно приравнять координату  $z_1$  в уравнении (3) двум его крайним значениям:  $z_1 = \pm 0,5 \cdot b_w$ . В результате:

$$\varphi_{H,K} = \sqrt{r_o^2 \cdot \cos^2 \beta_n - b_w \cdot (0,25 \cdot b_w \pm r_o \cdot \sin \beta_n)} / r_1, \quad (4)$$

где  $r_1 = 0,5 \cdot m_n \cdot z_1 / \cos \beta_n$  – делительный радиус шестерни.

У слагаемого под корнем с двойным знаком “ $\pm$ ” знак “плюс” берется при расчете  $\varphi_H$ , а знак “минус” – при расчете  $\varphi_K$ .

Нарезание зубьев ЦЗПн-а осуществляется методом обкатки, поэтому вращение шестерни с угловой скоростью  $\omega_1$  и поступательное перемещение зуборезной головки со скоростью  $V_o$  являются взаимосвязанными движениями:  $V_o = \omega_1 \cdot r_1$ . При этом расстояние  $S$  между осями шестерни и зуборезной головки в направлении движения последней в процессе формирования одной впадины между двумя соседними зубьями шестерни меняется от  $S_{\max}$  до  $S_{\min}$ :

$$S_{\max} = (r_o - r_{o(P)}) \cdot \cos \beta_{\min}, \text{ рис. 2,}$$

$$S_{\min} = (r_o - r_{o(P)}) \cdot \cos \beta_{\max}, \text{ рис. 3.}$$

Углы поворота шестерни  $\varphi_H$  и  $\varphi_K$  позволяют найти коэффициент перекрытия ЦЗПн-а:

$$\varepsilon = \frac{\varphi_K - \varphi_H}{P} = \frac{\varphi_K - \varphi_H}{(2 \cdot \pi / z_1)} = \frac{\sqrt{r_o^2 - b_w^2} - r_o}{(2 \cdot \pi / z_1) \cdot r_1}, \quad (5)$$

где  $P = 2 \cdot \pi / z_1$  – окружной шаг зубьев.

Длина  $L$  продольной линии (3) наклонно-арочного зуба, лежащей на делительном диаметре шестерни (параметр  $L$  необходим для прочностных расчетов зуба):

$$L = \int_{\varphi_H}^{\varphi_K} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2} \cdot d\varphi, \quad (6)$$

$$\text{где} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = dx_1 / d\varphi = r_1 \cdot \sin \varphi; \\ \dot{y}_1 = dy_1 / d\varphi = -r_1 \cdot \cos \varphi; \\ \dot{z}_1 = dz_1 / d\varphi = -r_1^2 \cdot \varphi / \sqrt{r_o^2 - r_1^2 \cdot \varphi^2}. \end{cases} \quad (7)$$

После подстановки (7) в (6) получим искомую зависимость для расчета длины продольной линии (3):

$$L = r_o \cdot \int_{\varphi_H}^{\varphi_K} \frac{d\varphi}{\sqrt{(r_o/r_1)^2 - \varphi^2}} = r_o \cdot \arcsin \left( \frac{r_1 \cdot \varphi}{r_o} \right) \Big|_{\varphi_H}^{\varphi_K}. \quad (8)$$

Радиус кривизны продольной линии (3):

$$\rho = \frac{\sqrt{\left[ (r_o^2 - r_1^2 \cdot \varphi^2) \cdot \cos^2 \varphi + r_1^2 \cdot \varphi^2 \right]^3}}{\left| \varphi \cdot (r_o^2 - r_1^2 \cdot \varphi^2) \cdot \sin \varphi + r_o^2 \cdot \cos \varphi \right|}. \quad (9)$$

Пределы изменения радиуса кривизны  $\rho$  определяются из уравнения (9) при подстановке значений  $\varphi = \varphi_H$  и  $\varphi = \varphi_K$ .

Проиллюстрируем полученные аналитические результаты, касающиеся параметров

$$[r_{o(P)}, \Delta, \beta_{\min}, \beta_{\max}, \varphi_H, \varphi_K, S_H, S_K, \varepsilon, L, \rho_{\min}, \rho_{\max}],$$

численным примером расчета ЦЗПн-а со следующими характеристиками зацепления:

$$m_n = 4 \text{ мм}; \quad b_w = 85 \text{ мм}; \quad z_1 = 19; \quad \beta_n = 17^\circ 49' 27'';$$

$$r_1 = 0,5 \cdot m_n \cdot z_1 / \cos \beta_n = 0,5 \cdot 4 \cdot 19 / \cos 17^\circ 49' 27'' = 39,92 \text{ мм}.$$

Результаты расчетов приведены в таблице 1.

Табл. 1.

| Расчетный параметр | $r_{o(P)} / r_o$ | $\Delta$ | $\beta_{\min} / \beta_{\max}$ | $\varphi_H / \varphi_K$ | $S_{\min} / S_{\max}$ | $\varepsilon$ | $L$  | $\rho_{\min} / \rho_{\max}$ |
|--------------------|------------------|----------|-------------------------------|-------------------------|-----------------------|---------------|------|-----------------------------|
| Численное значение | 138,8/157,5      | 5,7      | 2,1°/35,2°                    | 184,8°/225,9°           | 15,3/18,7             | 2,2           | 91,0 | 28,4/224,4                  |

Примечания к таблице.

1) Расчетный диаметр зуборезной головки

$$d_{o(P)} = 2 \cdot r_{o(P)} = 2 \cdot 138,8 = 277,6 \text{ мм}$$

находится между двумя стандартными номинальными диаметрами зуборезной головки  $d_o$ , равными 250 и 315(мм), [17]. Так как должно выполняться условие  $r_o \geq r_{o(P)}$ , принят больший стандартный номинальный диаметр  $d_o = 315 \text{ мм}$ , для которого  $r_o = d_o / 2 = 315 / 2 = 157,5 \text{ мм}$ . При этом:

$$r_o = 157,5 \text{ мм} > r_{o(P)} = 138,8 \text{ мм}.$$

2) Линейные размеры в таблице даны в мм.

## Выводы

Для увеличения коэффициента перекрытия ЦЗПн-а следует принимать ближайший больший стандартный размер зуборезной головки  $r_o$  к ее расчетному значению  $r_{o(P)}$ , то есть, выполняя условие  $r_o \geq r_{o(P)}$ , что исключает отрицательные углы наклона зубьев в ЦЗПн-а. Получены аналитические

зависимости для кривизны и длины продольной линии зубьев, формулы (8) и (9). Они могут быть использованы для оценки прочностных характеристик наклонно-арочных зубьев, а также при исследовании геометро-кинематических показателей ЦЗПн-а: интерференции профилей, приведенной кривизны рабочих поверхностей зубьев, удельного скольжения и др.

### Список литературы

1. Севрюк В.Н. Геометрия цилиндрических передач с кругловинтовыми зубьями // Углеобогатительное Оборудование. 1967. Т. II. С. 434-446.
2. Городничий В.П. Исследование нагруженности и контактной выносливости цилиндрических передач с арочными зубьями: автореф. дисс. ... канд. техн. наук. – Курган, 1983. – 18 с.
3. Чалая Е.Ю. Усовершенствование цилиндрических передач с арочными зубьями смешанного зацепления синтезом исходного контура по геометро-кинематическим критериям: дисс. ... канд. техн. наук. – Луганск, 2018. – 245 с.
4. Патент №2322329 РФ. Способ изготовления цилиндрических колес с арочными зубьями / В.Д. Плахтин, А.П. Давыдов, А.Н. Паршин. – Опубл. 20.04.2008, Бюл. №11.
5. Syzrantseva K., Syzrantsev V., Varshavsky M. Contact load and endurance of cylindrical gearing with arch-shaped teeth // ICMT'2001. Proceeding of the International Conference on Mechanical Transmissions: April 5-9, 2001, Chongqing, China: P. 425-431.
6. Krol O., Sokolov V.: Parametric Modeling of Gear Cutting Tools. In: Advances in Manufacturing II. Lecture Notes in Mechanical Engineering, vol. 4, pp. 3-11. Springer, Cham (2019). DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-16943-5\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-16943-5_1).
7. O Krol and V Sokolov 2018 Modelling of spindle nodes for machining centers / J. Phys.: Conf. Ser. 1084 012007. – VSPID-2017. – doi: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1084/1/012007>
8. O. Krol, V. Sokolov 3D Modeling of Machine Tools for Designers. Sofia: Prof. Marin Drinov Academy Publishing House of Bulgarian Academy of Sciences, 2018. – 140 p. [https://doi.org/10.7546/3d\\_momtfd.2018](https://doi.org/10.7546/3d_momtfd.2018)
9. Shevchenko S., Muhovaty A., Krol O. Geometric Aspects of Modifications of Tapered Roller/ Procedia Engineering 150 (2016) 1107 – 1112. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.07.221>
10. Shevchenko S., Mukhovaty A., Krol O. (2020) Gear Transmission with Conic Axoid on Parallel Axes. In: Radionov A., Kravchenko O., Guzeev V., Rozhdestvenskiy Y. (eds) Proceedings of the 5th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2019). ICIE 2019. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. pp. 1-10. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-22041-9\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-22041-9_1)
11. Шевченко С.В., Стоянов А.А. Некоторые свойства зубчатых передач с наклонно-арочными зубьями // Конструирование и производство транспортных машин. – Республиканский межведомственный научно-

технический сборник. Выпуск 22. – Харьков: изд. Основа, 1993. – С. 61-69.

12. Шевченко С.В., Ткач П.Н. Некоторые особенности зацепления колес на параллельных осях с наклонно-арочными зубьями // Подъемно-транспортная техника. – Днепропетровск, 2007. – № 1(21). – С. 49-55.
13. Шевченко С.В., Муховатый А.А. Особенности параметризации цилиндрической зубчатой передачи с наклонно-арочными зубьями // Международная науч.-техн. конференция «Техническая эксплуатация водного транспорта и пути развития». – Петропавловск-Камчатский, 2019.
14. Машиностроение. Энциклопедия: В 40 т. Т. IV-1. Детали машин. Конструкционная прочность. Трение, износ, смазка / Под общ. ред. Д.Н. Решетова. – М.: Машиностроение, 1995. – 864 с.
15. ГОСТ 11902-77. Головки зуборезные для конических и гипоидных колес с круговыми зубьями. – М.: Изд-во стандартов, 1985. – 10 с.

### References

1. Sevryuk V.N. The geometry of cylindrical gears with round helical teeth // Coal preparation Equipment. 1967. Vol. II. P. 434-446.
2. Gorodnichny V.P. The study of loading and contact endurance of cylindrical gears with arched teeth: abstract of diss. ... cand. of tech. sc. – Kurgan, 1983. – 18 p.
3. Chalaya E.Yu. Improvement of cylindrical gears with arched teeth of mixed meshing by synthesis of the initial contour according to geometrical-kinematic criteria: diss. ... cand. of tech. sc. – Lugansk, 2018. – 245 p.
4. Patent No. 2323232 RU. Method of manufacturing a cylindrical wheel with arched teeth / V.D. Plakhtin, A.P. Davydov, A.N. Parshin. – Publ. 04.20.2008, Bull. No. 11.
5. Syzrantseva K., Syzrantsev V., Varshavsky M. Contact load and endurance of cylindrical gearing with arch-shaped teeth // ICMT'2001. Proceeding of the International Conference on Mechanical Transmissions: April 5-9, 2001, Chongqing, China: P. 425-431.
6. Krol O., Sokolov V.: Parametric Modeling of Gear Cutting Tools. In: Advances in Manufacturing II. Lecture Notes in Mechanical Engineering, vol. 4, pp. 3-11. Springer, Cham (2019). DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-16943-5\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-16943-5_1).
7. O Krol and V Sokolov 2018 Modelling of spindle nodes for machining centers / J. Phys.: Conf. Ser. 1084 012007. – VSPID-2017. – doi: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1084/1/012007>
8. O. Krol, V. Sokolov 3D Modeling of Machine Tools for Designers. Sofia: Prof. Marin Drinov Academy Publishing House of Bulgarian Academy of Sciences, 2018. – 140 p. [https://doi.org/10.7546/3d\\_momtfd.2018](https://doi.org/10.7546/3d_momtfd.2018)
9. Shevchenko S., Muhovaty A., Krol O. Geometric Aspects of Modifications of Tapered Roller/ Procedia Engineering 150 (2016) 1107 – 1112. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.07.221>

10. Shevchenko S., Mukhovaty A., Krol O. (2020) Gear Transmission with Conic Axoid on Parallel Axes. In: Radionov A., Kravchenko O., Guzeev V., Rozhdestvenskiy Y. (eds) Proceedings of the 5th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2019). ICIE 2019. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. pp. 1-10. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-22041-9\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-22041-9_1)
11. Shevchenko S.V., Stoyanov A.A. Some properties of gears with inclined - arched teeth // Design and production of transport vehicles. – Republican Technical Collection. Issue 22. – Kharkov: ed. Basis, 1993. – P. 61-69.
12. Shevchenko S.V., Tkach P.N. Some features of wheels gearing on parallel axes with inclined-arched teeth // Hoisting-and-transport equipment. – Dnepropetrovsk, 2007. – No. 1 (21). – P. 49-55.
13. Shevchenko S.V., Flies A.A. Features of the parametrization of a cylindrical gear with inclined-arched teeth // International scientific-technical. Conference "Technical Operation of Water Transport and Development Paths". Petropavlovsk-Kamchatsky, 2019.
14. Engineering. Encyclopedia: In 40 v. V. IV-1. Machine parts. Structural strength. Friction, wear, lubrication / Under total. ed. D.N. Reshetov. – M.: Engineering, 1995. – 864 p.
15. GOST 11902-77. Gear-cutting heads for bevel and hypoid wheels with circular teeth. – M.: Publishing house of standards, 1985. – 10 p.

|                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                          |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Шевченко Святослав Владимирович</b> – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой, Луганский национальный университет им. В.Даля, г. Луганск, Украина                   | <b>Shevchenko Svytoslav Vladimirovich</b> – candidate of technical sciences, associate professor, head of department, Vladymyr Dahl Lugansk National University, Lugansk, Ukraine                        |
| <b>Муховатый Александр Анатольевич</b> – кандидат технических наук, доцент, Луганский национальный университет им. В.Даля, г. Луганск, Украина                                        | <b>Muhovaty Aleksandr Anatolevich</b> – candidate of technical sciences, associate professor, Vladymyr Dahl Lugansk National University, Lugansk, Ukraine                                                |
| <b>Кроль Олег Семенович</b> – кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры, Восточноукраинский национальный университет им. В.Даля, г.Северодонецк, Украина, krolas@yandex.ru | <b>Krol Oleg Semenovich</b> – candidate of technical sciences, associate professor, professor of department, Volodymyr Dahl East-Ukrainian National University, Severodonetsk, Ukraine, krolas@yandex.ru |

Received 25.05.2020