

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ В ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ И ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУР

Кузнецов В.Г.

Ключевые слова: напряжения, деформации, цилиндр, давление, пластичность, текучесть, катодное пятно, вакуумная дуга.

Аннотация. Анализируется возможность математически рассчитать остаточные напряжения, возникающие на внутренней поверхности цилиндрической полости при нагружении ее таким образом, что возникает зона пластических деформаций. При снятии нагрузки это напряженно-деформированное состояние является начальным для решаемой задачи термоупругости при локальном нагреве предварительно напряженного цилиндра обработкой поверхности катодными пятнами вакуумно-дугового разряда.

ANALYSIS OF STRESSES AND DEFORMATIONS IN A HOLLOW CYLINDER UNDER THE INFLUENCE OF INTERNAL PRESSURE AND OF FIELD OF TEMPERATURES

Kuznetsov V.G.

Keywords: stresses, deformations, cylinder, pressure, ductility, fluidity, cathode spot, vacuum arc.

Abstract. The possibility of mathematically calculating the residual stresses that occur on the inner surface of a cylindrical cavity when a load is created in such a way that a zone of plastic deformations occurs is analyzed. When the load is removed, this stress-strain state is the initial one for the problem of thermoelasticity to be solved when a prestressed cylinder is locally heated by treating the surface with cathode spots of a vacuum-arc discharge.

Известны изделия цилиндрической формы, внутренняя поверхность которых в процессе эксплуатации подвергается механическим воздействиям, деформируется, изменяя геометрические размеры, и при достижении их предельных значений изделие снимается с эксплуатации. В качестве примера таким изделием может быть корпус буксы грузового железнодорожного вагона. Буксы воспринимают и передают колесным парам силы тяжести груженого кузова, а также динамические нагрузки, возникающие при движении вагона. В процессе эксплуатации корпус буксы (рис. 1) подвергается нагрузкам, вызывающим появление пластических деформаций.



Рис. 1. Корпус буксы вагона

Возникающие в процессе эксплуатации буксы пластические деформации превращают окружность в эллипс с осями b , a :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \begin{aligned} x &= a \cos \varphi, \\ y &= b \sin \varphi. \end{aligned}$$

Таким образом, в поперечном сечении буксы возникают остаточные напряжения, эпюра которых зависит от текущей диаграммы растяжения (σ , ε) для материала буксы. Опыт инженерной эксплуатации показывает, что обычно измеряемая величина $a-b \approx 50-70$ мкм. Для исправления эксцентриситета цилиндра (остаточной пластической деформации), предлагается подвергать его внутреннюю поверхность обработке катодными пятнами вакуумно-дугового разряда [1,2]. Полагая в дальнейшем, все решения писать для кругового цилиндра, будем считать, что остаточная деформация для него будет $\delta = 25$ мкм. Рассматриваем упругопластическое состояние цилиндра при отсутствии упрочнения по теории упругопластических деформаций. Считаем материал несжимаемым, и полагаем, что осевая деформация равна $\varepsilon_z = 0$.

Приведем основные уравнения упругопластического состояния трубы, внутренний радиус которой r_1 , наружный r_2 , труба нагружена условным внутренним давлением P (рис. 2).

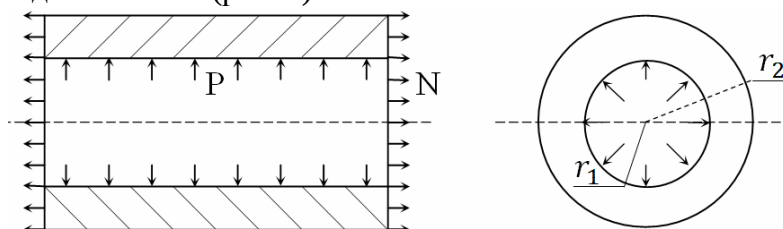


Рис. 2. Схема нагружения цилиндра

Дифференциальное уравнение равновесия цилиндра имеет вид [3]

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{2} = 0. \quad (1)$$

где σ_r - радиальные напряжения, σ_t - окружные напряжения.

Окружная деформация ε_t и радиальная ε_r деформация связаны с радиальным перемещением точки u и радиусом следующим образом [3]

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r}; \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (2)$$

Уравнение совместимости деформаций [3]

$$r \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial r} + \varepsilon_t - \varepsilon_r = 0. \quad (3)$$

Граничные условия запишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_r|_{r=r_1} &= -P, \\ \sigma_r|_{r=r_2} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Используя (1), (2), (3), (4) получаем решение в упругой области:

$$\begin{aligned}\sigma_r^e &= \frac{P \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{P \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} = A - B \frac{1}{r^2} \\ \sigma_t^e &= \frac{P \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{P \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} = A + B \frac{1}{r^2} \quad , \\ u^e &= \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{P \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{P \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r}\end{aligned}\quad (5)$$

$\sigma_z^e = \mu(\sigma_r + \sigma_t)$; e – упругое решение, μ – коэффициент Пуассона.

Для несжимаемого тела $\mu = 0,5$.

Рассматриваем материал без упрочнения.

Для построения решения в упругопластической области выпишем зависимости компонентов деформаций для данной задачи по гипотезе для теории упругопластических деформаций [3].

$$\begin{aligned}\sigma_r - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_r - \varepsilon_0), \\ \sigma_t - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_t - \varepsilon_0), \\ \sigma_z - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_z - \varepsilon_0),\end{aligned}\quad (6)$$

где σ_i - интенсивность напряжений; ε_i - интенсивность деформации; σ_0 - среднее нормальное напряжение; ε_0 - средняя линейная деформация.

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \frac{\sigma_r + \sigma_t + \sigma_z}{3} \\ \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_t)^2 + (\sigma_t - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2}.\end{aligned}\quad (7)$$

Для несжимаемого материала $\varepsilon_0 = 0$ и при $\varepsilon_z = 0$ из (6)

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \sigma_0, \\ \sigma_z &= \frac{\sigma_t + \sigma_r}{2}.\end{aligned}\quad (8)$$

Подставляя (8) в (7) получим

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_t - \sigma_r). \quad (9)$$

Согласно условию Мизеса [3]:

$$\sigma_i = \sigma_T, \quad (10)$$

где σ_T - напряжения текучести для материала.

То есть из (10) и (9):

$$\sigma_t - \sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T. \quad (11)$$

Используя (1) и (11), получим уравнения для σ_r , интегрируя которое получим [3]:

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \left(\ln \frac{r}{r_T} + C_1 \right), \quad (12)$$

где r_T - радиус текучести материала; C_1 зависит от r_T .

Из (9), (12) и (8) получим:

$$\begin{aligned} \sigma_T &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \left(\ln \frac{r}{r_T} + C_1 + 1 \right), \\ \sigma_z &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \left(\ln \frac{r}{r_T} + C_1 + 0,5 \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Заметим, что в пластической области постоянные A и B из (5) зависят от r_T . В упругой области σ_r^y и σ_t^y определяются по (5) с постоянными A и B . Величина осевого напряжения для несжимаемого материала определяется согласно (8). Подставляя в (8) (5) получим:

$$\sigma_z = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T A. \quad (14)$$

Для построения решения упругопластических деформаций необходимо рассмотреть условие совместимости деформаций (3). Интегрируя (3), получим

$$u = \frac{C_2}{r}. \quad (15)$$

Из (2) для несжимаемого материала ($\mu = 0,5$)

$$u = \frac{r}{E} [\sigma_t - \mu(\sigma_r + \sigma_z)]. \quad (16)$$

Подставляя в (16) (14) и (5), получим

$$u = \sqrt{3} \frac{\sigma_T}{E} \frac{B}{r}. \quad (17)$$

Из сравнения (15) и (17), получим

$$C_2 = \sqrt{3} \frac{\sigma_T}{E} B. \quad (18)$$

Для построения упругопластического решения необходимо определить постоянные C_1 , C_2 , A , B из условий сопряжения на границе радиуса текучести r_T (неизвестного), разделяющего упругую и пластическую область:

$$\begin{aligned} 1) & r = r_1; \sigma_r = -P, \\ 2) & r = r_2; \sigma_r = 0, \\ 3) & r = r_T; \sigma_r^P = \sigma_r^e, \\ 4) & r = r_T; \sigma_t^P = \sigma_t^e. \end{aligned} \quad (19)$$

« P » и « e » в числителе - означают пластичность и упругость.

Используя (12), (13), (3) и (19) получим:

$$C_1 = \frac{r_T^2 - r_1^2}{2r_2^2}; C_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma_T}{E} r_T^2; A = \frac{1}{2} \frac{r_T^2}{r_2^2},$$

$$B = \frac{r_T^2}{2}.$$
(20)

Из 1) условия (19) получим уравнение, связывающее радиус границы, отделяющей упругую область от пластической, и приложенное давление [3]:

$$P = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(2 \ln \frac{r_T}{r_1} - \frac{r_T^2}{r_2^2} + 1 \right).$$
(21)

Например, состояние текучести начинается, когда

$$r_T = r_1 \text{ и } P_T = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right].$$
(22)

Подставляя величины постоянных (20) в (12), (13), (5), (14) получим напряжения в пластической области:

$$\sigma_r^p = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left[2 \ln \frac{r}{r_T} + \left(\frac{r_T}{r_2} \right)^2 - 1 \right]; \quad \sigma_t^p = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left[2 \ln \frac{r}{r_T} + \left(\frac{r_T}{r_2} \right)^2 + 1 \right];$$

$$\sigma_z^p = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left[2 \ln \frac{r}{r_T} + \left(\frac{r_T}{r_2} \right)^2 \right],$$
(23)

и в упругой области:

$$\sigma_r^e = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(\frac{r_T}{r_2} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{r_2}{r} \right)^2 \right]; \quad \sigma_t^e = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(\frac{r_T}{r_2} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{r_2}{r} \right)^2 \right];$$

$$\sigma_z^e = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(\frac{r_T}{r_2} \right)^2.$$
(24)

Радиальное перемещение u в упругой и пластической области согласно (15) и (18) определяется:

$$u = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma_T}{E} \frac{r_T^2}{r}.$$
(25)

Оценим остаточные напряжения в цилиндре (буксе) при остаточном радиальном перемещении $\delta = u_{ост} = 25 \text{ мкм}$, учитывая, что эксцентриситет составляет 50 мкм.

Исходные данные для расчета:

$$r_1 = 12,5 \text{ см}, \quad r_2 = 14,1 \text{ см}; \quad \sigma_T = 4 \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 4000 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2};$$

$$E = 2 \cdot 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

Устанавливаем, используя (21), начало и конец пластического деформирования цилиндра:

$$0,119\sigma_T \leq P \leq 0,14\sigma_T. \quad (26)$$

Исходя из наличия остаточной деформации $\delta = u_{ocm} = 25$, оцениваем радиус текучести и нагрузку P (21):

$$r_T \sim 13,5 \text{ см}; \quad P_T \sim 0,13\sigma_T. \quad (27)$$

Используя (23), (5), (24) рассчитываем поле остаточных напряжений в цилиндре:

$$\begin{aligned} \sigma_t^P - \sigma_t^e \Big|_{r_1} &= -0,126_T, \\ \sigma_t^P - \sigma_t^e \Big|_{r_T} &= 0,16_T, \\ \sigma_t^P - \sigma_t^e \Big|_{r_2} &= 0,086_T. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Список литературы

1. Kuznetsov V.G., Kurbanov T.A. Improvement of performance properties of products by surface treatment of materials with cathode spots of vacuum arc discharge // Journal of Materials Science and Engineering. Conference Series: 387 (2018) 012045.
2. Патент №2635203 РФ. Способ восстановления изношенной внутренней цилиндрической поверхности / Кузнецов В.Г., Курбанов Т.А. – опубл. 09.11.2017, Бюл. № 3.
3. Пономарев С.Д., Бидерман В.А., Лизарев К.К., и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. II. – М.: Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы, 1958. – 974 с.

References

1. Kuznetsov V.G., Kurbanov T.A. Improvement of performance properties of products by surface treatment of materials with cathode spots of vacuum arc discharge // Journal of Materials Science and Engineering. Conference Series: 387 (2018) 012045.
2. Patent №2635203 RU. Method for restoring a worn inner cylindrical surface / Kuznetsov V.G., Kurbanov T.A. – Publ. 09.11.2017, Bul. No 3.
3. Ponomarev S.D., Biderman V.A., Lazarev K. K., et al. Calculations for strength in mechanical engineering. Vol. II. – M.: State Scientific and Technical Publishing House of Mechanical engineering literature, 1958. – 974p.

Кузнецов Вячеслав Геннадьевич – доктор технических наук, заведующий лабораторией, Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия, kvg-ipme@yandex.ru

Kuznetsov Viacheslav Gennadievich – doctor of science, head of laboratory, Institute for problems in mechanical engineering of Russian Academy of Sciences, Saint-Petersburg, Russia, kvg-ipme@yandex.ru

Received 20.12.2020