

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕХНИКИ ЛИНЕЙНЫХ МАТРИЧНЫХ НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ СТАБИЛИЗАЦИИ ДВУХЗВЕННОГО ПЕРЕВЁРНУТОГО МАЯТНИКА

Садчиков Ю.Г.

Ключевые слова: линейные матричные неравенства, LMI-техника, стабилизация по выходу, регулятор полного порядка, динамический объект, двухзвенный перевёрнутый маятник.

Аннотация. В последнее время благодаря развитию численных методов решения задач выпуклой оптимизации всё более популярным способом синтеза регуляторов для динамических объектов становится аппарат линейных матричных неравенств (Linear Matrix Inequality (LMI)). В статье рассматривается нелинейная модель двухзвенного перевёрнутого маятника, после линеаризации которой проводится синтез динамического регулятора для обеспечения асимптотической устойчивости системы вблизи неустойчивого положения равновесия при помощи пакета LMI Control Toolbox, включённого в состав среды научных вычислений MathWorks MATLAB. Проводится проверка полученных результатов путём применения синтезированного регулятора к нелинейной модели двухзвенного перевёрнутого маятника. Показывается, как при помощи изменения степени устойчивости системы можно влиять на характеристики переходного процесса.

APPLICATION OF THE LINEAR MATRIX INEQUALITIES TECHNIQUE FOR STABILIZATION OF A DOUBLE LINK INVERTED PENDULUM

Sadchikov Yu.G.

Keywords: linear matrix inequalities, LMI-technique, output stabilization, full-order controller, dynamic object, double link inverted pendulum.

Abstract. Recently, thanks to the development of numerical methods for solving convex optimization problems, the apparatus of linear matrix inequalities (Linear Matrix Inequality (LMI)) has become an increasingly popular method for synthesizing controllers for dynamic objects. The article discusses a nonlinear model of a double link inverted pendulum, after linearization of which a dynamic controller is synthesized to ensure asymptotic stability of a system near an unstable equilibrium position using the LMI Control Toolbox package included in the MathWorks MATLAB scientific computing environment. The results obtained are verified by applying the synthesized controller to the nonlinear model of a two-link inverted pendulum. It is shown how by changing the degree of stability of the system it is possible to influence the characteristics of the transient response.

Введение

Линейные матричные неравенства (*Linear Matrix Inequality (LMI)*) в теории автоматического управления применяются со второй половины двадцатого века [1-2]. Но, стоит отметить, что в общем случае аналитически решать применяемые линейные матричные неравенства для объектов управления, описываемых системами дифференциальных уравнений более четвёртого порядка, не представляется возможным.

В связи с этим широкое распространение применение *LMI*-техники по отношению к реальным динамическим системам стало возможным только после создания в конце XX века эффективных методов для численного решения линейных матричных неравенств [3-5]. К настоящему моменту

создано множество пакетов прикладных программ для решения линейных матричных неравенств, самыми распространёнными из которых являются *LMI Control Toolbox*, включённый в состав среды научных вычислений *MathWorks MATLAB*, и пакет прикладных программ *SeDuMi (Self-Dual-Minimization Package)*, имеющий интерфейсы для использования в средах *MathWorks MATLAB* и *GNU Octave* [6-7].

Постановка задачи

Рассматривается двухзвенный перевёрнутый маятник, представленный на рисунке 1.

Маятник имеет неподвижную точку в опоре O , представляющей собой идеальный цилиндрический шарнир. Такой же идеальный шарнир применяется в точке D и соединяет между собой звенья маятника, представляющие собой абсолютно твердые тела. Через φ_1 и φ_2 обозначены отсчитываемые против часовой стрелки углы отклонения от вертикали первого и второго звеньев соответственно.

Нелинейные уравнения движения двухзвенного перевёрнутого маятника в матричной форме записываются в следующем виде [8]:

$$A_n \ddot{\bar{\varphi}} + F \dot{\bar{\varphi}} + B_n \sin \bar{\varphi} = M, \quad (1)$$

Здесь

$$\bar{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}, \quad \dot{\bar{\varphi}}^2 = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1^2 \\ \dot{\varphi}_2^2 \end{bmatrix}, \quad \sin \bar{\varphi} = \begin{bmatrix} \sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_2 \end{bmatrix},$$

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{12} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ a_{12} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) & a_{22} \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \\ a_{12} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_n = \begin{bmatrix} -b_1 & 0 \\ 0 & -b_2 \end{bmatrix},$$

где $a_{11} = I_1 + m_2 l^2$; $a_{12} = m_2 r_2 l$; $a_{22} = I_2$; $b_1 = (m_1 r_1 + m_2 l) g$; $b_2 = m_2 r_2 g$; I_1 и I_2 – моменты инерции первого и второго звеньев относительно шарниров O и D соответственно; m_1 и m_2 – массы первого и второго звеньев; r_1 и r_2 – расстояния от шарниров O и D до центров масс первого и второго звеньев; l – длина первого звена OD ; g – ускорение свободного падения; M – момент, прикладываемый к шарниру O .

В дальнейшем при синтезе системы стабилизации маятник рассматривается вблизи положения равновесия, что позволяет применять для

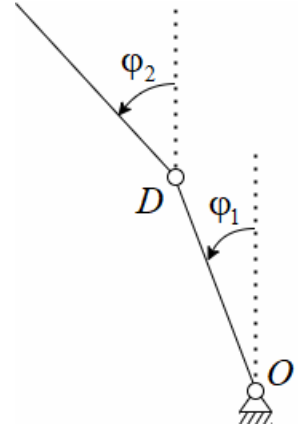


Рис. 1. Двухзвенный перевёрнутый маятник

его динамического описания линеаризованную математическую модель, которая задаётся следующей системой дифференциальных уравнений [8]:

$$A_1 \ddot{\bar{\varphi}} + B_n \bar{\varphi} = M, \quad (2)$$

$$\text{где } A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Система линейных дифференциальных уравнений возмущённого движения маятника в векторно-матричной форме Коши:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A \cdot \bar{x} + B \cdot u; \\ \bar{y} = C \cdot \bar{x}; \end{cases} \quad (3)$$

где $A \in \square^{n_x \times n_x}$ – матрица объекта управления (ОУ); $B \in \square^{n_x \times n_u}$ – матрица управления; $C \in \square^{n_y \times n_x}$ – матрица выхода; $\bar{x} \in \square^{n_x}$ – вектор состояния ОУ, в котором $x_1 = \varphi_1$, $x_2 = \varphi_2$, $x_3 = \dot{\varphi}_1$, $x_4 = \dot{\varphi}_2$; u – скалярное ($n_u = 1$) управляющее воздействие; $\bar{y} \in \square^{n_y}$ – вектор измеряемых параметров ОУ (вектор выхода); n_x , n_u и n_y – размерности векторов состояния ОУ, управления и выхода.

Задача стабилизации по выходу рассматриваемого объекта управления (3) сводится к тому, что требуется синтезировать динамический регулятор полного порядка $n_R = n_x = 4$, который обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы со степенью устойчивости не меньше β .

Уравнения регулятора задаются следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_R = A_R \cdot \bar{x}_R + B_R \cdot \bar{y}; \\ u = C_R \cdot \bar{x}_R + D_R \cdot \bar{y}; \end{cases} \quad (4)$$

где $\bar{x}_R \in \square^{n_x}$ – вектор параметров состояния динамического регулятора; $A_R \in \square^{n_x \times n_x}$; $B_R \in \square^{n_x \times n_y}$; $C_R \in \square^{n_u \times n_x}$; $D_R \in \square^{n_u \times n_y}$ – искомые матрицы уравнений динамического регулятора в векторно-матричной форме Коши.

Синтез динамического регулятора на основе LMI-техники

Для синтеза динамического регулятора при помощи техники линейных матричных неравенств необходимо составить уравнение замкнутой системы вида:

$$\dot{\bar{x}}_c = A_c \cdot \bar{x}_c, \quad (5)$$

где $\bar{x}_c$ – вектор состояния замкнутой системы; $A_c \in \square^{2n_x \times 2n_x}$ – матрица замкнутой системы, полученная путём объединения систем уравнений (3) и (4):

$$A_c = \begin{bmatrix} A + B D_R C & B C_R \\ B_R C & A_R \end{bmatrix}, \quad (6)$$

На основании выражения (6) вводятся вспомогательные блочные матрицы:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \begin{bmatrix} A & 0_{n_x \times n_x} \\ 0_{n_x \times n_x} & 0_{n_x \times n_x} \end{bmatrix}; & B_0 &= \begin{bmatrix} 0_{n_x \times n_x} & B \\ I_{n_x \times n_x} & 0_{n_x \times n_x} \end{bmatrix}; \\
C_0 &= \begin{bmatrix} 0_{n_x \times n_x} & I_{n_x \times n_x} \\ C & 0_{n_y \times n_x} \end{bmatrix}; & K &= \begin{bmatrix} A_R & B_R \\ C_R & D_R \end{bmatrix};
\end{aligned} \tag{7}$$

где $0_{n_x \times n_x}$ — нулевая матрица размером $n_x \times n_x$, а $I_{n_x \times n_x}$ — единичная матрица размером $n_x \times n_x$.

С учётом введённых вспомогательных блочных матриц (7) уравнение матрицы замкнутой системы (5) переписывается следующим образом:

$$A_c = A_0 + B_0 K C_0. \tag{8}$$

Для обеспечения асимптотической устойчивости замкнутой системы со степенью устойчивости не меньше β вводится квадратичная функция Ляпунова $V = \bar{x}_c^T Q \bar{x}_c$ с неизвестной положительно определённой матрицей $Q \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$, $Q = Q^T > 0$ такой, что при движении системы по любой траектории будет выполнено неравенство $\dot{V} < -\beta V$, что эквивалентно неравенству:

$$\dot{V} + \beta V < 0. \tag{9}$$

Согласно второй теореме Ляпунова, если функция Ляпунова (9) существует для замкнутой системы (5), то рассматриваемая система будет асимптотически устойчивой со степенью устойчивости не меньше β . Стоит отметить, что под степенью устойчивости $\beta > 0$ понимается, что максимальное значение вещественной части собственных чисел матрицы замкнутой системы A_c будет располагаться левее мнимой оси на расстоянии не менее $\frac{1}{2}\beta$ [9, 10].

С учётом уравнения (5) и введённых обозначений (7) и (8) условие (9) можно записать в виде:

$$A_0^T Q + Q A_0 + \beta Q + C_0^T K^T B_0^T Q + Q B_0 K C_0 < 0. \tag{10}$$

Неравенство (10) не является линейным относительно совокупности переменных K и Q , поэтому для его решения используют базовую двухэтапную *LMI*-технику, описанную в работах [4, 6, 9].

На первом этапе определяется симметричная положительно определённая матрица Q . Вводится вспомогательная матрица $P = Q^{-1}$. Доказано [9], что неравенство (9) имеет решение, если имеет решение следующая система матричных неравенств:

$$\begin{cases} W_{C_0}^T (A_0^T Q + Q A_0 + \beta Q) W_{C_0} < 0; \\ W_{B_0^T}^T (P A_0^T + A_0 P + \beta P) W_{B_0^T} < 0. \end{cases} \tag{11}$$

Здесь W_{C_0} и $W_{B_0^T}$ обозначают матрицы, столбцы которых образуют базисы ядер матриц C_0 и B_0^T , т.е. W_{C_0} и $W_{B_0^T}$ удовлетворяют матричным уравнениям $C_0 W_{C_0} = 0$, $B_0^T W_{B_0^T} = 0$ и имеют максимальный ранг среди всех их решений.

В соответствии с блочной структурой матрицы A_0 матрицы Q и P также представляются в блочном виде:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}; \quad (12)$$

где $Q_{11}, Q_{12}, Q_{22}, P_{11}, P_{12}, P_{22} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$.

Учитывая обозначения (7), (12) и используя ряд свойств и методов обращения блочных матриц [6, 9], система матричных неравенств (11) приводится к виду, пригодному для решения методами выпуклой оптимизации [11]. В итоге, задача нахождения взаимнообратных положительно-определённых матриц Q и P сводится к нахождению двух матриц $Q_{11} = Q_{11}^T > 0$ и $P_{11} = P_{11}^T > 0$, удовлетворяющих системе линейных матричных неравенств:

$$\begin{cases} W_C^T (A^T Q + Q A + \beta Q) W_C < 0; \\ W_{B^T}^T (P A^T + A P + \beta P) W_{B^T} < 0; \\ \begin{bmatrix} Q_{11} & I_{n_x \times n_x} \\ I_{n_x \times n_x} & P_{11} \end{bmatrix} > 0. \end{cases} \quad (13)$$

Если система неравенств (13) имеет решение, то для восстановления матрицы Q можно использовать формулу Фробениуса:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{11} - P_{11}^{-1} \\ Q_{11} - P_{11}^{-1} & Q_{11} - P_{11}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

На втором этапе вычисленная согласно (14) матрица Q подставляется в исходное матричное неравенство (10), которое после этого становится линейным относительно искомой прямоугольной матрицы K , и его также можно решить методами выпуклой оптимизации [6, 7, 11]. После нахождения матрицы K по формуле (6) из неё извлекаются искомые матрицы регулятора $-A_R, B_R, C_R, D_R$.

Результаты моделирования

С помощью пакета *LMI Control Toolbox*, включённого в состав среды научных вычислений *MathWorks MATLAB*, найдены матрицы регулятора (4) A_R, B_R, C_R, D_R . Для изучения возможности регулирования запасов устойчивости и изменения характеристик переходных процессов расчёт матриц регулятора производится при значениях степени устойчивости системы β в интервале от 0,01 до 12.

Согласно уравнениям (1-4) в среде *MathWorks MATLAB* запрограммированы нелинейная математическая модель двухзвенного перевернутого маятника и модель синтезированного регулятора. В качестве возмущения задаётся начальное значение угла отклонения от вертикали первого звена маятника $\varphi_1 = 3^\circ$. Начальные значения остальных параметров состояния, а именно угла отклонения от вертикали второго звена и угловые скорости поворота обоих звеньев принимаются равными нулю.

Расположение собственных чисел матрицы замкнутой системы (5) на комплексной плоскости в окрестности мнимой оси приведено на рисунке 2.

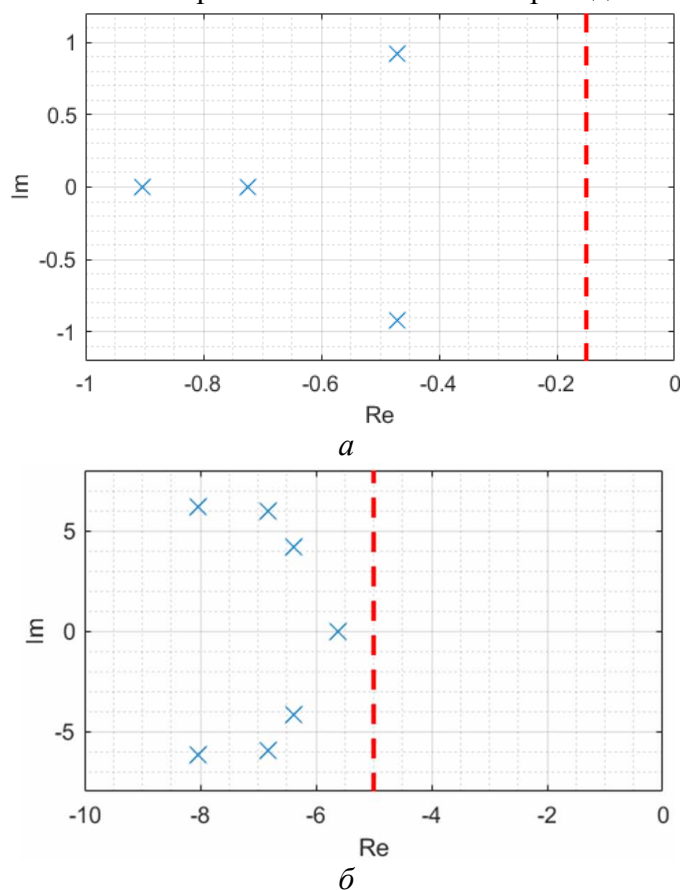


Рис. 2. Расположение собственных чисел матрицы замкнутой системы на комплексной плоскости (пунктиром обозначена граница $\frac{1}{\beta}$ максимального значения вещественной части собственных чисел матрицы замкнутой системы): а – регулятор при значении параметра $\beta=0,3$; б – регулятор при значении параметра $\beta=10$

Результаты моделирования замкнутой системы на основе нелинейной модели двухзвенного перевернутого маятника (1) представлены на рисунках 3-4.

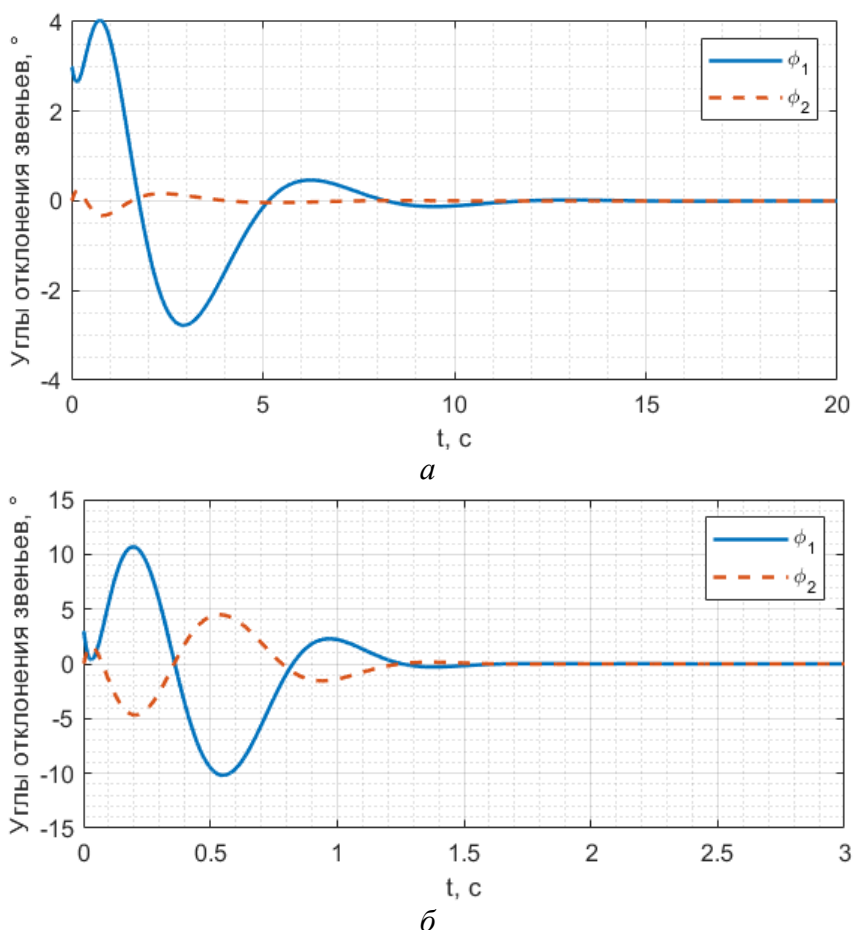


Рис. 3. Переходные процессы, вызванные отклонением первого звена на 3° в начальный момент времени: а – регулятор при значении параметра $\beta=0,3$; б – регулятор при значении параметра $\beta=10$

Заключение

В представленной работе проведён синтез динамического регулятора при помощи аппарата линейных матричных неравенств для обеспечения устойчивости двухзвенного перевёрнутого маятника вблизи его неустойчивого положения равновесия. Определены матрицы регулятора полного порядка (4) A_R , B_R , C_R , D_R при помощи пакета *LMI Control Toolbox*, включённого в состав среды научных вычислений *MathWorks MATLAB*. Проведено моделирование динамики двухзвенного перевёрнутого маятника на основе его нелинейной математической модели с применением синтезированного регулятора.

Анализируя полученные результаты можно сделать вывод, что синтезированный на основе *LMI*-техники динамический регулятор, обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы. При этом все вещественные части собственных чисел матрицы A_c располагаются левее мнимой оси на расстоянии не менее $\frac{1}{2}\beta$.

Стоит отметить, что за счёт изменения параметра β удаётся также в некоторых пределах регулировать характеристики переходных процессов. При увеличении запаса устойчивости увеличивается быстродействие замкнутой системы (уменьшается время переходного процесса) и перерегулирование.

При значениях запаса устойчивости $\beta < 0,3$ и $\beta > 10,8$ синтезированный динамический регулятор имеет собственную неустойчивость, т.к. одно из собственных значений матрицы A_r имеет положительную вещественную часть. При этом асимптотическая устойчивость замкнутой системы в случае возмущающего воздействия в виде отклонения в начальный момент времени первого звена маятника на 3° от вертикали нарушается лишь при значениях $\beta \geq 11,2$.

Список литературы

1. Якубович В.А. Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования // Доклады Академии наук СССР. 1962. Т. 143, № 6. С. 1304-1307.
2. Willems J.C. Least Squares Stationary Optimal Control and the Algebraic Riccati Equation // IEEE Transactions on Automatic Control. 1971. Vol. 16, №6. P. 621-634.
3. Balandin D.V., Kogan M.M. LMI-based Optimal Attenuation of Multi-Storey Building Oscillations under Seismic Excitations // Structural Control and Health Monitoring. 2005. Vol. 12, № 2. P. 213-224.
4. Ефимов А.А., Лазарев Д.В., Мухин А.В. Исследование эффективности применения техники линейных матричных неравенств для синтеза многоканальной системы стабилизации аэродинамически неустойчивого летательного аппарата // Космонавтика и ракетостроение. 2019. №4 (109). С. 5-14.
5. Nishimura H., Kojima A. Seismic Isolation Control for a Building-like Structure // IEEE Control Systems. 1999. Vol. 19. P. 38-44.
6. Баландин Д.В., Коган М.М. Использование LMI toolbox пакета Matlab в синтезе законов управления // Учебно-методич. мат. по программе: Информационные технологии и компьютерная математика. – Нижний Новгород: Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2006. – 135 с.
7. Пакшин П.В., Митрофанов И.Н. Применение SeDuMi интерфейса к решению задач робастного управления с обратной связью по выходу // Второй Всероссийской научной конференции: Проектирование инженерных и научных приложений в среде Matlab. – М.: ИПУ РАН, 2004. С. 1074-1089.
8. Формальский А.М. Управление движением неустойчивых объектов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 232 с.
9. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. – М.: Физматлит, 2007. – 280 с.

10. Барбашин Е.А. Функция Ляпунова. – М.: Наука, 1970. – 240 с.
11. Nesterov Y., Nemirovski A. Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming. – Philadelphia: SIAM, 1994.

References

1. Yakubovich V.A. Solution of some matrix inequalities found in automatic control theory // Reports of the USSR Academy of Sciences, 1962, v. 143, №6, p. 1304-1307.
2. Willems J.C. Least Squares Stationary Optimal Control and the Algebraic Riccati Equation // IEEE Transactions on Automatic Control, 1971, v. 16, № 6, p. 621-634.
3. Balandin D.V., Kogan M.M. LMI-based Optimal Attenuation of Multi-Storey Building Oscillations under Seismic Excitations // Structural Control and Health Monitoring, 2005, v. 12, № 2, p. 213-224.
4. Efimov A.A., Lazarev D.V., Mukhin A.V. Study of the efficiency of using the technique of linear matrix inequalities for the synthesis of a multichannel stabilization system for an aerodynamically unstable aircraft // Cosmonautics and rocket science, 2019, № 4 (109), p. 5-14.
5. Nishimura H., Kojima A. Seismic Isolation Control for a Building-like Structure // IEEE Control Systems, 1999, v. 19, p. 38-44.
6. Balandin D.V., Kogan M.M. Using the LMI toolbox of the Matlab package in the synthesis of control laws // In educational and methodical. mat. for the program: Information technology and computer mathematics. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State University N.I. Lobachevsky, 2006, 135 p.
7. Pakshin P.V., Mitrofanov I.N. Application of SeDuMi interface to solving robust control problems with output feedback // In pr. Second All-Russian Scientific Conference: Designing Engineering and Scientific Applications in Matlab. M.: IPU RAN, 2004, p. 1074-1089.
8. Formalsky A.M. Motion control of unstable objects. – M.: FIZMATLIT, 2012, 232 p.
9. Balandin D.V., Kogan M.M. Synthesis of control laws based on linear matrix inequalities. Moscow: Fizmatlit, 2007, 280 p.
10. Barbashin E.A. Lyapunov function. Moscow: Nauka, 1970, 240 p.
11. Nesterov Y., Nemirovski A. Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming. Philadelphia: SIAM, 1994.

Садчиков Юрий Григорьевич – студент, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация, yury.sadchickov@yandex.ru	Sadchikov Yuri Grigoryevich – student, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation, yury.sadchickov@yandex.ru
---	--

Received 11.12.2020