

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Кыдыралиев Т.Р., Рустамова Д.К.

Ключевое слова: краевая задача, дифференциальное уравнения, функция Эрмита, асимптотика, пограничный слой.

Аннотация. Для решения первой краевой задачи с сингулярно возмущенным дифференциальным уравнением второго порядка, строится асимптотическое разложение по малому параметру. Доказано асимптотическое разложение обобщенной функции.

ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF EDGE PROBLEM OF SINGULARLY PERTURBED DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SECOND ORDER

Kydyraliev T.R., Rustamova D.K.

Keywords: edge problem, differential equation, Ermit function, asymptotic, boundary layer.

Abstract. To solve the first boundary problem with singularly perturbed differential equations of the second order, an asymptotic decomposition over a small parameter is constructed. The asymptotic decomposition of the generalized function is proved.

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\varepsilon y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad (1)$$

$$\text{с краевой задачей } y(0, \varepsilon) = A, y(1, \varepsilon) = B, \quad (2)$$

где $p(x) = xp_0(x)$, $p_0(x) > 0$.

Решение дифференциального уравнения (1) будем искать в виде

$$y(x, \varepsilon) = \bar{y}(x, \varepsilon) + \Pi\left(\frac{x-1}{\varepsilon}, \varepsilon\right) + U(x, \varepsilon). \quad (3)$$

Введем обозначение $(x-1)/\varepsilon = \xi$. Найдя соответствующие производные функции $y(x, \varepsilon)$ и подставляя их в исходное уравнение (1) получим следующее:

$$\varepsilon \bar{y}''(x, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{d^2 \Pi(\xi, \varepsilon)}{d\xi^2} + \varepsilon U''(x, \varepsilon) = p(x) \bar{y}'(x, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} p(x) \frac{d\Pi(\xi, \varepsilon)}{d\xi} + p(x) U'(x, \varepsilon) + q(x) \bar{y}(x, \varepsilon) + q(x) \Pi(\xi, \varepsilon) + q(x) U(x, \varepsilon) + r(x) \quad (4)$$

Приравнявая члены при $\bar{y}(x, \varepsilon)$, $\Pi(\xi, \varepsilon)$, $U(x, \varepsilon)$

$$\varepsilon \bar{y}''(x, \varepsilon) = p(x) \bar{y}'(x, \varepsilon) + q(x) \bar{y}(x, \varepsilon) + r(x), \quad (5)$$

$$\frac{d^2 \Pi(\xi, \varepsilon)}{d\xi^2} = p(1 + \varepsilon \xi) \frac{d\Pi(\xi, \varepsilon)}{d\xi} + \varepsilon q(1 + \varepsilon \xi) \Pi(\xi, \varepsilon), \quad (6)$$

$$\varepsilon U''(x, \varepsilon) = p(x) U'(x, \varepsilon) + q(x) U(x, \varepsilon). \quad (7)$$

Решение $\bar{y}$ ищем в виде ряда:

$$\bar{y}(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{y}_k(x). \quad (8)$$

Подставим (8) в (5):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} \bar{y}''_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k p(x) \bar{y}'_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k q(x) \bar{y}_k(x).$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^m$ получим системы уравнений.

$$0 = p(x) \bar{y}'_0 + q(x) \bar{y}_0 + r(x), \quad (9^*)$$

$$\bar{y}''_{m-1} = p(x) \bar{y}'_m + q(x) \bar{y}_m, m \geq 1, \quad (9)$$

Пусть $p, q, r \in C^\infty[0,1]$, а $x=0$ – особая точка. Уравнение (9*) имеет единственное решение $\bar{y}_0(x) \in C^\infty[0,1]$. Аналогично функции $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \dots, \bar{y}_m(x)$ определяется однозначно. Поэтому ряд (8) формально удовлетворяет уравнению (5). Тогда $\bar{y}(x, \varepsilon)$ является решением уравнения (1). Решение $\bar{y}(x, \varepsilon)$ в общем случае не удовлетворяет условия (2) так как $\bar{y}(x, \varepsilon)$ найдено однозначно.

Исследуем уравнение

$$p(x)y'(x) + q(x)y + r(x) = 0,$$

в случае, когда $p(0) = 0$. $y'(x) + \frac{q(x)}{p(x)}y = -\frac{r(x)}{p(x)}$ общее решение

$$y = \exp\left\{-\int_{x_0}^x \frac{q(s)}{p(s)} ds\right\} \left[C - \int_{x_0}^x \frac{r(\tau)}{p(\tau)} \exp\left\{-\int_{x_0}^{\tau} \frac{q(s)}{p(s)} ds\right\} d\tau \right] = C \exp\left\{-\int_{x_0}^x \frac{q(s)}{p(s)} ds\right\} - \int_{x_0}^x \frac{r(\tau)}{p(\tau)} \exp\left\{-\int_x^{\tau} \frac{q(s)}{p(s)} ds\right\} d\tau.$$

Если выбрать C в $y(x)$ равной C_0 , то существует $y_0(x)$. Аналогично построим y_{2k} , [1,52 ст.]. Однако $\bar{y}$ не удовлетворяет условию (2) в общем случае.

Теперь определим Π . Функция Π , будем искать в виде ряда

$$\Pi(\xi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Pi_k(\xi). \quad (10).$$

Подставим (10) в (6)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Pi_0}{d\xi^2} + \varepsilon \frac{d^2 \Pi_1}{d\xi^2} + \dots + \varepsilon^k \frac{d^2 \Pi_k}{d\xi^2} + \dots &= \left[p(1) + \varepsilon \frac{p'(1)}{1!} \xi + \dots + \varepsilon^k \frac{p^{(k)}(1)}{k!} \xi^k + \dots \right] * \\ * \left[\frac{d^2 \Pi_0}{d\xi^2} + \varepsilon \frac{d^2 \Pi_1}{d\xi^2} + \dots + \varepsilon^k \frac{d^2 \Pi_k}{d\xi^2} + \dots \right] &+ \varepsilon \left[q(1) + \varepsilon \frac{q'(1)}{1!} \xi + \dots + \varepsilon^k \frac{q^{(k)}(1)}{k!} \xi^k + \dots \right] * \\ * [\Pi_0 + \varepsilon \Pi_1 + \dots + \varepsilon^k \Pi_k + \dots] \end{aligned}$$

Сумма трех слагаемых (3), должна удовлетворять условию (2)

$$\begin{cases} \bar{y}(0, \varepsilon) + \Pi\left(\frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon\right) + U(0, \varepsilon) = A, \\ \bar{y}(1, \varepsilon) + \Pi(0, \varepsilon) + U(1, \varepsilon) = B. \end{cases}$$

Отсюда относительно Π_k , следует (приравнявая при одинаковых степенях ε)

$$\frac{d^2 \Pi_0}{d\xi^2} = p(1) \frac{d\Pi_0}{d\xi},$$

$$\frac{d^2 \Pi_{k+1}}{d\xi^2} = p(1) \frac{d\Pi_{k+1}}{d\xi} + \sum_{m=0}^k \left[\frac{p^{(m+1)}(1)}{(m+1)!} \xi^{m+1} \frac{d\Pi_{k-m}}{d\xi} + \frac{q^{(m)}(1)}{m!} \xi^m \Pi_{k-m} \right], k \geq 0.$$

Каждое рекуррентное уравнения является линейным уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами. По условию $\Pi_k \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$. Имеем $\Pi_0(\xi) = [A - u_0(0)]e^{-\sqrt{p(1)}\xi}$ и аналогично определяем функции $\Pi_1(\xi), \Pi_2(\xi), \dots, \Pi_k(\xi) = P_{2k}(\xi)e^{-\sqrt{p(1)}\xi}$. Здесь $P_{2k}(\xi)$ многочлены степени $2k$. Перейдем к нахождению пограничной функции U .

Рассмотрим уравнение (7) в окрестности точки 0. Введем новую переменную $\tau = \sqrt{\frac{p_0(0)}{2\varepsilon}}x$. Тогда получим следующее уравнение относительно U

$$\frac{d^2 U}{d\tau^2} = \frac{2\tau}{p_0(0)} p_0(\sqrt{\varepsilon} \sqrt{\frac{2}{p_0(0)}} \tau) \frac{dU}{d\tau} + \frac{2}{p_0(0)} q(\sqrt{\varepsilon} \sqrt{\frac{2}{p_0(0)}} \tau) U.$$

Решение будем искать в виде: $U = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\varepsilon}^k U_k(\tau)$. Воспользуемся разложением

$$p_0(\sqrt{\varepsilon} \sqrt{\frac{2}{p_0(0)}} \tau) = p_0(0) + \sqrt{\varepsilon} \frac{p'(0)}{1!} \sqrt{\frac{2}{p_0(0)}} \tau + \dots + (\sqrt{\varepsilon})^k \frac{p^{(k)}(0)}{k!} \left(\sqrt{\frac{2}{p_0(0)}}\right)^k \tau^k + \dots$$

Подставляя, получим

$$\begin{aligned} & U_0''(\tau) + \sqrt{\varepsilon} U_1''(\tau) + (\sqrt{\varepsilon})^2 U_2''(\tau) + \dots + (\sqrt{\varepsilon})^k U_k''(\tau) + \dots = \frac{2\tau}{p_0(0)} * \\ & * \left[p_0(0) + \sqrt{\varepsilon} \frac{p'(0)}{1!} \sqrt{\frac{2}{p_0(0)}} \tau + \dots + (\sqrt{\varepsilon})^k \frac{p^{(k)}(0)}{k!} \left(\sqrt{\frac{2}{p_0(0)}}\right)^k \tau^k + \dots \right] * \\ & * [U_0'(\tau) + \sqrt{\varepsilon} U_1'(\tau) + (\sqrt{\varepsilon})^2 U_2'(\tau) + \dots + (\sqrt{\varepsilon})^k U_k'(\tau) + \dots] + \\ & + \frac{2}{p_0(0)} \left[q_0(0) + \sqrt{\varepsilon} \frac{q'(0)}{1!} \sqrt{\frac{2}{p_0(0)}} \tau + \dots + (\sqrt{\varepsilon})^k \frac{q^{(k)}(0)}{k!} \left(\sqrt{\frac{2}{p_0(0)}}\right)^k \tau^k + \dots \right] * \\ & * [U_0(\tau) + \sqrt{\varepsilon} U_1(\tau) + (\sqrt{\varepsilon})^2 U_2(\tau) + \dots + (\sqrt{\varepsilon})^k U_k(\tau) + \dots] \end{aligned}$$

Приравниваем члены при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$:

$$U_0'' = 2\tau U_0' + 2v U_0, \quad v = -\frac{q(0)}{p_0(0)},$$

$$U_k'' - 2\tau U_k' + 2v U_k = \frac{2\tau}{p_0(0)} \sum_{m=1}^k \frac{p_0^{(m)}(0)}{m!} \left(\sqrt{\frac{2}{p_0(0)}}\right)^m \tau^m U_{k-m}' + \frac{2}{p_0(0)} \sum_{m=1}^k \frac{q^{(m)}(0)}{m!} \left(\sqrt{\frac{2}{p_0(0)}}\right)^m \tau^m U_{k-m}, k \geq 1, (11)$$

с граничным условием

$$U_0(0) = A - \bar{y}_0(0), U_1(0) = 0, U_2(0) = -\bar{y}_1(0), U_{2m+1}(0) = 0, U_{2m}(0) = -\bar{y}_m(0).$$

Решение уравнения: $U_0'' - 2\tau U_0' + 2\nu U_0 = 0, \nu = -\frac{q(0)}{p_0(0)}$ уравнения Эрмита

$U_0(\tau) = CH_\nu(\tau), H_\nu(\tau)$ - функция Эрмита

$$U_0(0) = CH_\nu(0) = A - \bar{y}_0(0), C = \frac{A - \bar{y}_0(0)}{H_\nu(0)}, U_0(\tau) = \frac{A - \bar{y}_0(0)}{H_\nu(0)} H_\nu(\tau),$$

здесь $H_\nu(\tau) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_0^\infty \exp\{-t^2 - 2t\tau\} t^{-\nu-1} dt$, $\Gamma(-\nu)$ - гамма функция.

Рассмотрим следующие функции $A_{\nu,p}(\tau) = \int_0^\infty \exp\{-t^2 - 2t\tau\} t^{-\nu-1} \ln^p t dt$,

где $p \geq 0$ - целое число, $\nu < 0$ где $p = 0, A_{\nu,0} = \Gamma(-\nu)H_\nu(\tau)$ остаточного члена

$A_{\nu,p}$ выполняется следующая оценка $|\Phi_N(\tau)| \leq C |\ln(2\tau)|^{-N}$ (см. [5] стр. 72).

Лемма 1. Частным решением уравнения $U_0'' - 2\tau U_0' + 2\nu U_0 = A_{\nu,p}(\tau)$ является функция

$$U(\tau) = \frac{1}{2(p+1)} A_{\nu,p}(\tau).$$

Доказательство. $L[U] \equiv \frac{d^2 A_{\nu,0}}{d\tau^2} - 2\tau \frac{dA_{\nu,0}}{d\tau} + 2\nu A_{\nu,0} = 0$ дифференцируем

обе части по ν . $\frac{d^2 A_{\nu,1}}{d\tau^2} - 2\tau \frac{dA_{\nu,1}}{d\tau} + 2\nu A_{\nu,1} = 2A_{\nu,0}(\tau)$. Итак уравнения

$L[U] \equiv A_{\nu,0}(\tau)$ имеет частное решение $U = \frac{1}{2} A_{\nu,1}(\tau)$, аналогично доказывается

для уравнения $L[U] = A_{\nu,p}(\tau)$, а частное решение $U = \frac{1}{2(p+1)} A_{\nu,p+1}(\tau)$.

Лемма 2. Частным решением уравнения $U_0'' - 2\tau U_0' + 2\nu U_0 = \tau^k A_{\nu,p}(\tau)$

является функция $U = \sum_{n=0}^k \sum_{s=0}^{p+1} \beta_{n,s}(\tau) A_{\nu-n,s}(\tau)$.

Доказательство.

$$\frac{d(\tau^k A_{\nu,p}(\tau))}{d\tau} = \tau^k \frac{d(A_{\nu,p}(\tau))}{d\tau} + k\tau^{k-1} A_{\nu,p}(\tau),$$

$$\frac{d^2(\tau^k A_{\nu,p}(\tau))}{d\tau^2} = \tau^k \frac{d^2(A_{\nu,p}(\tau))}{d\tau^2} + 2k\tau^{k-1} \frac{d(A_{\nu,p}(\tau))}{d\tau} + k(k-1)\tau^{k-2} A_{\nu,p}(\tau).$$

Подставляя

$$\begin{aligned}
 (p+1)A_{v,p}(\tau) &= 2A_{v-2,p+1}(\tau) + 2\tau A_{v-1,p+1}(\tau) + vA_{v,p+1}(\tau), \\
 \tau A_{v-1,p+1}(\tau) &= \frac{p+1}{2} A_{v,p}(\tau) - A_{v-2,p+1}(\tau) - \frac{v}{2} A_{v,p+1}(\tau), \\
 \tau A_{v-1,p}(\tau) &= \frac{p}{2} A_{v,p-1}(\tau) - A_{v-2,p}(\tau) - \frac{v}{2} A_{v,p}(\tau) \quad \times 4\tau^k, \\
 4\tau^{k+1} A_{v-1,p}(\tau) &= -2v\tau^k A_{v,p}(\tau) + 2p\tau^k A_{v,p-1}(\tau) - 4\tau^k A_{v-2,p}(\tau), \\
 L[\tau^k A_{v,p}(\tau)] &= \tau^k \frac{d^2(A_{v,p}(\tau))}{d\tau^2} + 2k\tau^{k-1} \frac{d(A_{v,p}(\tau))}{d\tau} + k(k-1)\tau^{k-2} A_{v,p}(\tau) - \\
 - 2\tau\tau^k \frac{d(A_{v,p}(\tau))}{d\tau} - 2\tau k\tau^{k-1} A_{v,p}(\tau) + 2v\tau^k A_{v,p}(\tau) &= 4\tau^k A_{v-2,p}(\tau) - 4k\tau^{k-1} A_{v-1,p}(\tau) + \\
 + 4\tau^{k+1} A_{v-1,p}(\tau) + k(k-1)\tau^{k-2} A_{v,p}(\tau) - 2k\tau^k A_{v,p}(\tau) + 2v\tau^k A_{v,p}(\tau), \\
 L[\tau^k A_{v,p}(\tau)] &= -2v\tau^k A_{v,p}(\tau) + 2p\tau^k A_{v,p-1}(\tau) - 4\tau^k A_{v-1,p}(\tau) - k(k-1)\tau^{k-2} A_{v,p}(\tau) - \\
 - 4k\tau^{k-1} A_{v-1,p}(\tau) + 4\tau^k A_{v-2,p}(\tau) - 2k\tau^k A_{v,p}(\tau) + 2v\tau^k A_{v,p}(\tau), \\
 L[U_{v,p}^k(\tau)] &= \tau^k A_{v,p}(\tau), \\
 \tau^k A_{v,p}(\tau) &= -2kU_{v,p}^k(\tau) + 2pU_{v,p-1}^k(\tau) + k(k-1)U_{v,p}^{k-2}(\tau) - 4kU_{v-1,p}^{k-1}(\tau), \\
 U_{v,p}^k(\tau) &= \frac{p}{2} U_{v,p-1}^k(\tau) + \frac{k-1}{2} U_{v,p}^{k-2}(\tau) - 2U_{v-1,p}^{k-1}(\tau) - \frac{\tau^k}{2k} A_{v,p}(\tau), \\
 U_{v,p}^k(\tau) &= \sum_{m=0}^k \frac{p!}{m!k^{p-m}} (-2U_{v-1,m}^{k-1}(\tau) + \frac{k-1}{2} U_{v,m}^{k-2}(\tau) - \frac{1}{2k} \tau^k A_{v,m}(\tau)), \\
 U_{v,p}^k(\tau) &= \sum_{m=0}^k \sum_{s=0}^{p+1} \beta_{m,s}(\tau) A_{v-m,s}(\tau),
 \end{aligned}$$

где $\beta_{m,s}(\tau)$, $m = 0, 1, \dots, k$, $s = 0, 1, \dots, C$ – многочлены $U_{v,p}^k(\tau)$ не выше степени $k - m$.

Последнее равенство доказывает правильности леммы 2. Можно доказать следующую теорему.

Теорема. Пусть $p \geq 0, v < 0$. Тогда для системы (11) имеет решения вида

$$U_k(\tau) = \sum_{m=0}^{3k} \sum_{s=0}^{p+1} \beta_{m,s}(\tau) A_{v-m,s}(\tau),$$

где $p = 0, 1, \dots, k$, $\beta_{m,s}(\tau)$ многочлены степени $2k$.

Доказательство. Для $U_1(\tau)$ имеем уравнения вида $L[U_1] = \tau^2 \alpha A_{v-1,0}(\tau) + \tau \beta A_{v,0}(\tau)$.

Далее, применяя лемму 2, получим решение в виде

$$U_1(\tau) = \sum_{m=0}^3 \sum_{s=0}^1 \beta_{m,s}(\tau) A_{v-m,s}(\tau).$$

Аналогично по индукции, доказываем существование $U_k(\tau)$ для $k \geq 2$.

Теорема. Пусть $p \geq 0, v < 0$. Тогда при $\tau \rightarrow +\infty$ для функции

$$A_{v,p}(\tau) = \int_0^{\infty} \exp\{-t^2 - 2\tau t\} t^{-v-1} \ln^p t dt, \quad \text{существует асимптотическое}$$

разложение

$$A_{v,p}(\tau) \approx \tau^v (\ln \tau)^p \sum_{k=0}^p a_k (\ln \tau)^{-k} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tau^{v-2n} (\ln \tau)^p \sum_{k=0}^p a_{kn} (\ln \tau)^{-k},$$

$$\text{где } a_k = (-1)^{k+p} C_p^k \int_0^{\infty} e^{-2t_1} \ln^k t_1 \cdot t_1^{-v-1} dt_1, k = 0, 1, 2, \dots, p,$$

$$a_{kn} = (-1)^{k+p} C_p^k \int_0^{\infty} e^{-2t} \ln^k t \cdot t^{-(v-2n)-1} dt, n > 1.$$

Доказательство.

$$A_{v,p}(\tau) = \int_0^{\infty} e^{-t^2} e^{-2\tau t} t^{-v-1} \ln^p t dt = \int_0^a e^{-t^2} e^{-2\tau t} t^{-v-1} \ln^p t dt + \int_a^{\infty} e^{-t^2} e^{-2\tau t} t^{-v-1} \ln^p t dt.$$

Здесь $0 < a < 1$, второе слагаемое при $\tau \rightarrow \infty$ показательная функция $e^{-x\tau}$, $x > 0$ стремится 0. Преобразуем первой слагаемой

$$\begin{aligned} \int_0^a e^{-t^2} e^{-2\tau t} \ln^p t \cdot t^{-v-1} dt &= \int_0^a [1 + (e^{-t^2} - 1)] e^{-2\tau t} \ln^p t \cdot t^{-v-1} dt = \int_0^a e^{-2\tau t} \ln^p t \cdot t^{-v-1} dt + \\ &+ \int_0^a (e^{-t^2} - 1) e^{-2\tau t} \ln^p t \cdot t^{-v-1} dt = G(\tau) + F(\tau). \end{aligned}$$

Введем новую переменную $t_1 = \tau t$, $\tau \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} G(\tau) &= (-1)^p (\tau)^v (\ln \tau)^p \left[\int_0^{\infty} e^{-2t_1} t_1^{-v-1} dt_1 - C_p^1 (\ln \tau)^{-1} \int_0^{\infty} e^{-2t_1} \ln t_1 \cdot t_1^{-v-1} dt_1 + \dots + \right. \\ &+ \left. (-1)^k C_p^k (\ln \tau)^{-k} \int_0^{\infty} e^{-2t_1} \ln^k t_1 \cdot t_1^{-v-1} dt_1 + (-1)^3 (\ln \tau)^{-3} \int_0^{\infty} e^{-2t_1} \ln^3 t_1 \cdot t_1^{-v-1} dt_1 \right] = \\ &= \tau^v (\ln \tau)^p \sum_{k=0}^p a_k (\ln \tau)^{-k}, \end{aligned}$$

$$a_k = (-1)^{k+p} C_p^k \int_0^{\infty} e^{-2t_1} \ln^k t_1 \cdot t_1^{-v-1} dt_1, k = 0, 1, 2, \dots, p.$$

Теперь рассмотрим $F(\tau)$

$$\begin{aligned} F(\tau) &= \int_0^a (e^{-t^2} - 1) e^{-2\tau t} \ln^p t \cdot t^{-v-1} dt = \int_0^a \left[-\frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} + \dots \right] e^{-2\tau t} \ln^p t \cdot t^{-v-1} dt = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^a e^{-2\tau t} \ln^p t \cdot t^{-(v-2n)-1} dt = (-1)^n \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tau^{v-2n} (\ln \tau)^p \sum_{k=0}^p a_{kn} (\ln \tau)^{-k}, \end{aligned}$$

$$A_{v,p}(\tau) \approx \tau^v (\ln \tau)^p \sum_{k=0}^p a_k (\ln \tau)^{-k} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tau^{v-2n} (\ln \tau)^p \sum_{k=0}^p a_{kn} (\ln \tau)^{-k},$$

$$a_k = (-1)^{k+p} C_p^k \int_0^{\infty} e^{-2t_1} \ln^k t_1 \cdot t_1^{-v-1} dt_1, k = 0, 1, 2, \dots, p,$$

$$a_{kn} = (-1)^{k+p} C_p^k \int_0^{\infty} e^{-2t} \ln^k t \cdot t^{-(v-2n)-1} dt, n > 1.$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. – М.: Наука, 1989. – 336 с.
2. Абдувалиев А.О. Асимптотическое приближение решения сингулярно возмущенного уравнения параболического типа с особым предельным оператором // Научные труды ОшГУ. Физико-математические науки. – Ош: 1995, Выпуск 1. – С. 4-12.
3. Васильева А.Б, Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – М.: Высш. шк., 1990. – 208 с.
4. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. – М.: Наука, 1974. – 312 с.
5. Федорюк М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1987. – 544с.

References

1. Ilyin A.M. Coordination of asymptotic decompositions of solutions to boundary problems. – M.: Science, 1989. – 336 p.
2. Abduvaliev A.O. Asymptotic approximation of the solution of the singularly perturbed equation of the parabolic type with a special limit operator // Scientific works of OshSU. Physical and mathematical sciences. – Osh: 1995, Issue 1. – P. 4-12.
3. Vasilieva A.B, Butuzov V.F. Asymptotic methods in the theory of singular perturbations. – M.: Higher. sch., 1990. – 208 p.
4. Nikiforov A.F., Uvarov V.B. Special functions of mathematical physics. – M.: Science, 1974. – 312 p.
5. Fedoryuk M.V. Asymptotic: Integrals and rows. – M.: Science, 1987. – 544 p.

Кыдыралиев Торогелди Раимжанович – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель	Kydyraliev Torogeldi Raimjanovich – candidate of physical and mathematics sciences, senior lecturer, torogeldi1@mail.ru
Рустамова Динара Кошеевна – кандидат физико-математических наук, доцент, drustamova@list.ru	Rustamova Dinara Kosheevna – candidate of physical and mathematics sciences, associate professor, drustamova@list.ru
Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, г.Бишкек, Кыргызстан	Zh. Balasagyn Kyrgyz National University, Bishkek, Kyrgyzstan

Received 14.04.2021