

КОНЦЕПЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТОВ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ В ОЦЕНКЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ПЛОСКИХ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С УЧЕТОМ СВЯЗНЫХ СИЛОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Миронов А.С., Елисеев А.В.

Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск, Россия

Ключевые слова: механические колебательные системы, колебание твердого тела, связанные силовые возмущения, структурные математические модели, передаточная функция, динамическое гашение колебаний, формы динамических взаимодействий, динамические инварианты, частотная функция обнуления.

Аннотация. В рамках методологии структурного математического моделирования ставится задача оценки разнообразия возможных динамических состояний и форм взаимодействий элементов механических колебательных систем, включающих в свой состав твердое тело. На основе использования частотной функции обнуления амплитуды колебания координаты точки твердого тела разработан подход к оценке разнообразия динамических состояний и форм взаимодействий элементов механических колебательных систем с помощью динамических инвариантов.

THE CONCEPT OF DYNAMIC INVARIANTS OF MECHANICAL OSCILLATORY SYSTEMS IN THE EVALUATION OF THE FEATURES OF THE PLANE MOTION OF A SOLID BODY TAKING INTO ACCOUNT THE RELATED FORCE EXCITATION

Mironov A.S., Eliseev A.V.

Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia

Keywords: mechanical oscillatory systems, solid body oscillations, connected force perturbations, structural mathematical models, transfer function, dynamic vibration damping, dynamic invariants, frequency zeroing function.

Abstract. Within the framework of the methodology of structural mathematical modeling, the task is set to assess the diversity of possible dynamic states and forms of interactions of elements of mechanical oscillatory systems that include a solid body in their composition. Based on the use of the frequency function of zeroing the amplitude of the oscillation of the coordinate of a point of a solid, an approach has been developed to assess the diversity of dynamic states and forms of interactions of elements of mechanical oscillatory systems using dynamic invariants.

Введение. В рамках структурного подхода для обобщенной оценки динамических особенностей цепных механических колебательных систем находит своё применение подход, использующий представление существенных особенностей амплитудно-частотных характеристик передаточных функций в виде так называемых динамических инвариантов [1-2]. Вместе с тем, концепция динамических инвариантов, нашедшая применение для цепных механических систем, недостаточно детализирована для механических колебательных систем, образованных твердыми телами [3].

Предлагаемая статья посвящена развитию концепции динамических инвариантов в приложении к механическим колебательным системам, включающих в свой состав твердые тела условиях связанных силовых возмущений.

I. Основные положения. Постановка задачи. Рассматривается механическая колебательная система, образованная твердым телом массой M и моментом инерции J , упругими элементами k_1, k_2 , представляющими собой вертикальные упоры (рис. 1).

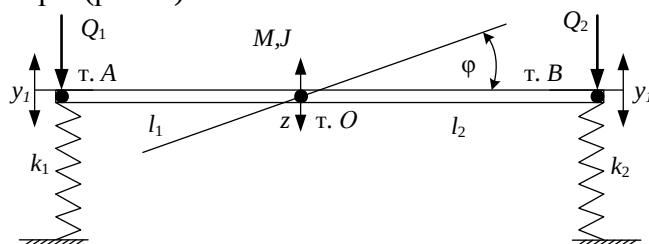


Рис. 1. Механическая колебательная система. Расчетная схема

Предполагается, что силовые возмущения Q_1, Q_2 связаны между собой согласно выражению $Q_2 = \gamma Q_1$, где γ – коэффициент связности.

Динамические особенности движения точки твердого тела могут быть определены по аналогии с цепной системой на основе построения динамических инвариантов, отображающих в обобщенном смысле взаимодействия элементов системы в зависимости от коэффициента связанности γ внешних силовых возмущений.

Задача заключается в построении совокупности динамических инвариантов для фиксированной твердого тела в зависимости от коэффициента связности внешних силовых возмущений.

II. Математическая модель. На основе известных методов механической колебательной системе, используемой в качестве расчетной схемы технического объекта, может быть сопоставлена структурная схема эквивалентной в динамической отношении системы автоматического управления (рис.2).

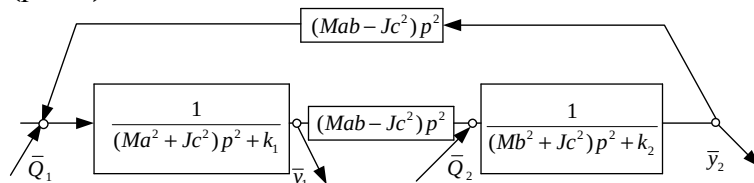


Рис. 2. Структурная схема механической колебательной системы (рис. 1), $p = j\omega$ – комплексная переменная, $j = \sqrt{-1}$, ω – частота внешнего возмущения, «-» над переменной обозначает изображение Лапласа [4]

В предположении, что Q_1 служит входным сигналом, а y_2 – выходным сигналом, для структурной схемы может быть определена передаточная функция $W_{21}(p)$, представляющая собой отношение изображения входного

сигнала к изображению выходного сигнала, амплитудно-частотная характеристика которой имеет вид:

$$A_{21}(\gamma, \omega) = \frac{(- (Ma^2 + Jc^2)\omega^2 + k_1)\gamma + (Mab - Jc^2)\omega^2}{(- (Ma^2 + Jc^2)\omega^2 + k_1)(- (Mb^2 + Jc^2)\omega^2 + k_2) - ((Mab - Jc^2)\omega^2)^2}. \quad (1)$$

На основе числителя амплитудно-частотной характеристики (1) может быть определена так называемая частотная функция обнуления амплитуды колебания координаты y_2 :

$$\omega^2(\gamma) = \frac{k_1\gamma}{(Ma^2 + Jc^2)\gamma - (Mab - Jc^2)}. \quad (2)$$

Существенные особенности амплитудно-частотной характеристики (1), выражающиеся в количествах резонансов, режимов динамического гашения, положительных и отрицательных форм динамических взаимодействий, могут определены с учетом взаимного расположения частот собственных колебаний системы и частот обнуления амплитуд колебания координаты y_2 , определяемых функцией обнуления (2) в зависимости от коэффициента связности γ .

III. Построение динамических инвариантов на основе особенностей частотной функции с учетом расположения собственных частот механической колебательной системы в условиях связанных силовых возмущений. Рассматривается механическая колебательная система в предположении, что для собственных частот σ_1 , σ_2 системы и парциальных частот n_1 и n_2 выполнены условия:

$$\sigma_1 < \min \{n_1, n_2\} < \max \{n_1, n_2\} < \sigma_2. \quad (3)$$

В этом случае на основе частотной функции обнуления могут быть определены значение коэффициента связности γ_0 , в котором частотная функция (2) обнуляется, и значение $\gamma_{кр}$, в котором частотная функция (2) терпит разрыв второго рода:

$$\gamma_{кр} = \frac{Mab - Jc^2}{Ma^2 + Jc^2}, \quad (4) \quad \omega^2(\gamma_0) = 0. \quad (5)$$

В свою очередь, совпадение частотной функции обнуления $\omega^2(\gamma)$ с собственными частотами σ_1 , σ_2 механической колебательной системы определяет особенными значениями γ_1 , γ_2 коэффициента связности:

$$\omega^2(\gamma_1) = \sigma_1^2, \quad (6) \quad \omega^2(\gamma_1) = \sigma_1^2. \quad (7).$$

На основе определенных из условий (4)-(7) точек γ_1 , γ_0 , $\gamma_{кр}$, γ_2 множество Γ всех значений коэффициента связности γ может быть представлено в виде: $\Gamma = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 \cup I_5 \cup I_6 \cup I_7 \cup I_8 \cup I_9$,

$$\Gamma = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 \cup I_5 \cup I_6 \cup I_7 \cup I_8 \cup I_9, \quad (8)$$

где множества $I_1 = (-\infty, \gamma_1)$, $I_2 = \{\gamma_1\}$, $I_3 = (\gamma_1, \gamma_0)$, $I_4 = \{\gamma_0\}$, $I_5 = (\gamma_0, \gamma_{кр})$, $I_6 = \{\gamma_{кр}\}$, $I_7 = (\gamma_{кр}, \gamma_2)$, $I_8 = \{\gamma_2\}$, $I_9 = (\gamma_2, \infty)$ образуют разбиение Γ . Для каждого I_n из разбиения Γ может быть выбран коэффициент связности $\gamma \in I_n$, для которого соответствующая амплитудно-частотная характеристика будет отражать определенный набор динамических свойств системы в зависимости от частоты связанных внешних возмущений.

Совокупность всех динамических инвариантов позволяет охарактеризовать бесконечное семейство амплитудно-частотных характеристик, зависящего от коэффициента связности γ внешних силовых возмущений с помощью конечного набора динамических инвариантов, обладающими характеристиками вида $S_l^k F_n^m$, где k – количество резонансов, l – количество режимов обнуления амплитуды колебания координаты объекта, динамическое состояние которого оценивается, m – количество положительных форм взаимодействий, n – количество отрицательных форм динамических взаимодействий, $J_{k+l+m+n}$ – интегральная характеристика (табл. 1).

Табл. 1. Динамические инварианты амплитудно-частотных характеристик

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	$\gamma < \gamma_1$	$\gamma = \gamma_1$	$\gamma_1 < \gamma < \gamma_0$	$\gamma = \gamma_0$	$\gamma_0 < \gamma < \gamma_{kp}$	$\gamma = \gamma_{kp}$	$\gamma_{kp} < \gamma < \gamma_2$	$\gamma = \gamma_2$	$\gamma_2 < \gamma$
II	$S_1^2 F_2^2$	$S_0^1 F_1^1$	$S_1^2 F_2^2$	$S_1^2 F_1^2$	$S_0^2 F_1^2$	$S_0^2 F_1^2$	$S_1^2 F_2^2$	$S_0^1 F_1^1$	$S_1^2 F_2^2$
III	J_7	J_3	J_7	J_6	J_5	J_5	J_7	J_3	J_7

Каждый динамический инвариант отображает частотный характер взаимодействий элементов механической колебательной системы, реализующийся в выбранной точке твердого тела в зависимости от коэффициента связности внешних возмущений.

Закключение. Таким образом, в рамках структурного математического моделирования разработан методологический подход для построения динамических инвариантов податливости фиксированной точки твердого тела, находящегося в условиях связных силовых нагружений. Основой подхода служит понятие динамического инварианта, сохраняющегося на определенных семействах амплитудно-частотных характеристик передаточных функций, используемых для оценки динамических состояний и форм динамических взаимодействий элементов механических колебательных систем.

Разработанный подход может быть использован для построения распределения динамических инвариантов по точкам твердого тела с целью создания технологии оценки, контроля и формирования динамических состояний механических колебательных систем, образованных твердыми телами, находящихся в условиях внешнего силового возмущения.

Список литературы

1. Eliseev S.V. Theory of oscillations. structural mathematical modeling in problems of dynamics of technical objects / S.V. Eliseev, A.V. Eliseev. – Cham, 2019. – 521 p.
2. Елисеев А.В. Динамика машин. Системные представления, структурные схемы и связи элементов / А.В. Елисеев, Н.К. Кузнецов, А.О. Московских. – М.: Инновационное машиностроение, 2019. – 381 с.
3. Елисеев А.В. Методологические подходы к оценке совокупности динамических состояний и форм взаимодействий элементов вибрационных машин

транспортного и технологического назначения // А.В. Елисеев, А.С. Миронов // Journal of Advanced Research in Technical Science. – 2022. – № 28. – С. 22-25.

4. Лурье А.И. Операционное исчисление и применение в технических приложениях. – М.: Наука. 1959. – 368 с.

References

1. Eliseev S.V. Theory of oscillations. structural mathematical modeling in problems of dynamics of technical objects / S.V. Eliseev, A.V. Eliseev. – Cham, 2019. – 521 p.
2. Eliseev A.V. Dynamics of machines. System representations, structural schemes and connections of elements / A.V. Eliseev, N.K. Kuznetsov, A.O. Moskovskikh. – М.: Innovative mechanical engineering, 2019. – 381 p.
3. Eliseev A.V. Methodological approaches to the assessment of the totality of dynamic states and forms of interactions of elements of vibrating machines for transport and technological purposes // A.V.Eliseev, A.S. Mironov Journal of Advanced Research in Technical Science. 2022. No. 28. P. 22-25.
4. Lurie A.I. Operational calculus and application in technical applications. – М.: Science. 1959. – 368 p.

Миронов Артем Сергеевич – соискатель	Mironov Artem Sergeevich – applicant
Елисеев Андрей Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры математики	Eliseev Andrey Vladimirovich – candidate of technical sciences, associate professor of mathematics Department
eavsh@ya.ru	

Received 19.09.2022