

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОДВИЖНОГО БАЛАНСИРУЮЩЕГО РОБОТА

Скобов Э.А., Васильев Е.М.

Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж

Ключевые слова: мобильные роботы, гироскопическая стабилизация, уравнения Лагранжа.

Аннотация. Решается задача математического описания двухколёсного балансирующего робота, установленного на платформе гироскопического типа. Актуальность этой задачи определяется потребностью в системах автоматического управления движением указанных роботов, отличающихся высокой манёвренностью перемещений в ограниченном пространстве. В соответствии с указанной функциональной особенностью рассматриваемых платформ модель должна предусматривать описание не только процесса балансирования на месте, но и режимы движения платформы: набор скорости, равномерное перемещение, торможение. С этой целью в качестве внешних воздействий на платформу помимо движущих моментов электродвигателей колёс и силы тяжести манипулятора учитывались силы трения качения, оказывающие принципиальное влияние на способы управления платформой во время её движения. Для составления модели использовались уравнения Лагранжа для кинетической энергии механической системы с геометрическими связями и двумя степенями свободы, определяемыми координатами: угловое положение платформы и угловое положение колёс. Приводится подробное изложение промежуточных выкладок, позволяющее модифицировать полученную модель для различных вариантов самобалансирующихся платформ.

Подвижный балансирующий робот с манипулятором представляет собою несущую платформу, перемещающуюся на двух соосных колёсах со встроенными в них независимыми электродвигателями. Высокая манёвренность такого манипулятора достигается одновременным выполнением двух задач управления: перемещение платформы по заданной траектории на плоскости, включая разворот на месте, и автоматическое поддержание (балансировка) вертикального положения её продольной оси [1].

Известные математические модели подобных манипуляторов предназначены для решения задачи балансировки платформы при стоянии на месте либо равномерном прямолинейном движении без трения [2,3]. В предлагаемой работе построена математическая модель, учитывающая переходные режимы платформы в процессе её движения, например, при наборе скорости или торможении с учётом сил трения качения.

Введём необходимые обозначения: x, y – вертикальная (снизу вверх) и горизонтальная (слева направо) оси неподвижной (земной) системы координат; v – скорость платформы в плоскости xOy ; φ – угол, отсчитываемый по часовой стрелке между осью y и нормалью z к платформе (этот угол равен углу отклонения поверхности платформы от горизонтали); ψ – угол поворота колеса, отсчитываемый от оси y в направлении к оси x ; $m_{\text{п}}$ – масса платформы вместе с грузом, сосредоточенные в центре масс; $J_{\text{п}}$ – момент инерции платформы вместе с грузом относительно центра их масс; $J_{\text{к}}$ – момент инерции одного колеса относительно оси вращения колёс; r – радиус колеса; $m_{\text{к}}$ – масса одного колеса; L – расстояние от центра масс платформы с грузом до оси колёс; $k_{\text{тр}}$ – коэффициент трения качения одного колеса; g – ускорение свободного падения;

C_e , C_m – постоянные двигателя по противоЭДС и моменту; R – активное сопротивление якорной обмотки двигателя постоянного тока; U – напряжение питания двигателей.

Для составления математической модели движения описанного балансирующего робота как механической системы воспользуемся уравнениями Лагранжа для её кинетической энергии T :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= M_{\psi}; \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} &= M_{\phi},\end{aligned}\tag{1}$$

где M_{ψ} и M_{ϕ} – моменты действующих на робот активных сил, приводящие к изменению координат ψ и ϕ (отметим попутно, что рассматриваемая механическая система имеет две степени свободы и для определения её положения в пространстве достаточно двух координат: ψ и ϕ).

Кинетическая энергия робота складывается из кинетических энергий T_k двух колёс и T_n платформы с грузом [2]:

$$T = 2 \cdot T_k + T_n.\tag{2}$$

В свою очередь, кинетическую энергию одного колеса определим как сумму кинетических энергий его поступательного и вращательного движений:

$$T_k = \frac{m_k \cdot (r\dot{\psi})^2}{2} + \frac{J_k \cdot \dot{\psi}^2}{2}.\tag{3}$$

Аналогично, для платформы с грузом получим выражение:

$$T_n = \frac{m_n v_n^2}{2} + \frac{J_n \dot{\phi}^2}{2},\tag{4}$$

в котором v_n – скорость поступательного перемещения платформы с грузом. Проекции v_n на оси x и y равны соответственно:

$$v_{n,x} = r\dot{\psi} + L\dot{\phi} \cdot \cos(\phi);\tag{5}$$

$$v_{n,y} = -L\dot{\phi} \cdot \sin(\phi),$$

тогда
$$v_n^2 = v_{n,x}^2 + v_{n,y}^2.\tag{6}$$

После подстановки (5) в (6) и (6) в (4) T_n примет вид:

$$T_n = \frac{m_n (r\dot{\psi})^2}{2} + m_n r L \dot{\psi} \dot{\phi} \cdot \cos(\phi) + \frac{m_n (L\dot{\phi})^2}{2} + \frac{J_n \dot{\phi}^2}{2}.\tag{7}$$

Общая кинетическая энергия робота по уравнению (2):

$$T = \left(m_k \cdot r^2 + J_k + \frac{m_n r^2}{2} \right) \cdot \dot{\psi}^2 + \left(\frac{m_n L^2}{2} + J_n \right) \cdot \dot{\phi}^2 + m_n r L \dot{\psi} \dot{\phi} \cdot \cos(\phi).\tag{8}$$

Подставим (8) в уравнения Лагранжа (1):

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} &= (2m_k \cdot r^2 + 2J_k + m_n r^2) \cdot \dot{\psi} + m_n r L \dot{\phi} \cdot \cos(\phi); \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) &= (2m_k \cdot r^2 + 2J_k + m_n r^2) \cdot \ddot{\psi} + m_n r L (\ddot{\phi} \cdot \cos(\phi) - \dot{\phi}^2 \cdot \sin(\phi));\end{aligned}\tag{9}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = 0; \quad (10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = (m_{\pi} L^2 + J_{\pi}) \cdot \dot{\phi} + m_{\pi} r L \dot{\psi} \cdot \cos(\phi); \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) = (m_{\pi} L^2 + J_{\pi}) \cdot \ddot{\phi} + m_{\pi} r L (\ddot{\psi} \cdot \cos(\phi) - \dot{\psi} \dot{\phi} \cdot \sin(\phi));$$

$$\frac{\partial T}{\partial \phi} = -m_{\pi} r L \dot{\psi} \dot{\phi} \cdot \sin(\phi). \quad (12)$$

Момент M_{ψ} , определяющий изменение углового положения ψ колёс:

$$M_{\psi} = 2M_{\text{дв}} - (m_{\pi} + 2m_k) g k_{\text{тр}} \cdot \text{sign}(\dot{\psi}), \quad (13)$$

где $M_{\text{дв}}$ – момент силы, создаваемый электродвигателем колеса:

$$M_{\text{дв}} = \frac{U - C_e(\dot{\psi} - \dot{\phi})}{R} \cdot C_m. \quad (14)$$

Момент M_{ϕ} , определяющий изменение углового положения ϕ платформы:

$$M_{\phi} = m_{\pi} g L \cdot \sin(\phi) - 2M_{\text{дв}}. \quad (15)$$

После подстановки (9)-(15) в (1) получаем искомые дифференциальные уравнения, описывающие движение балансирующего робота в результате действия вращающих моментов электродвигателей и смещения центра массы платформы с грузом относительно вертикали:

$$\begin{aligned} (2m_k \cdot r^2 + 2J_k + m_{\pi} r^2) \cdot \ddot{\psi} + m_{\pi} r L (\ddot{\phi} \cdot \cos(\phi) - \dot{\phi}^2 \cdot \sin(\phi)) = 2 \frac{U - C_e(\dot{\psi} - \dot{\phi})}{R} \cdot C_m - \\ - (m_{\pi} + 2m_k) g \cdot k_{\text{тр}} \cdot \text{sign}(\dot{\psi}); \end{aligned} \quad (16)$$

$$(m_{\pi} L^2 + J_{\pi}) \cdot \ddot{\phi} + m_{\pi} r L \cdot \cos(\phi) \cdot \ddot{\psi} = m_{\pi} g L \cdot \sin(\phi) - 2 \frac{U - C_e(\dot{\psi} - \dot{\phi})}{R} \cdot C_m. \quad (17)$$

Список литературы

1. Васильев Е.М., Прокофьева Д.М. Нечёткое управление структурно неустойчивыми объектами // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2012. – Т. 8, №10.1. – С. 8-12.
2. Федоров Д.С. Разработка системы стабилизации угла отклонения балансирующего робота / Д.С. Федоров, А.Ю. Ивойлов, В.А. Жмудь, В.Г. Трубин // Автоматика и программная инженерия. – 2015. – №2(12). – С. 16-34.
3. Корнилов А.Н., Липатников Н.Г., Хижняков Ю.Н. Разработка системы управления “сегвей” на базе адаптивного нечеткого регулятора // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Серия “Электротехника, информационные технологии, системы управления”. – 2016. – №19. – С. 69-79.

Сведения об авторах:

Скобов Эдуард Александрович – студент ВГТУ, г.Воронеж;

Васильев Евгений Михайлович – к.т.н., доцент, доцент кафедры электропривода, автоматизации и управления в технических системах, ВГТУ, г.Воронеж.

MATHEMATICAL MODEL OF A MOBILE BALANCING ROBOT***Skobov E.A., Vasiljev E.M.***

Keywords: mobile robots, gyroscopic stabilization, Lagrange equations.

Abstract. The problem of mathematical description of a two-wheel balancing robot, installed on a platform of a gyroscopic type, is solved. The urgency of this task is determined by the need for automatic control systems for the movement of these robots, characterized by high maneuverability of displacements in a confined space. In accordance with this functional feature of the platforms in question, the model should provide a description of not only the on-site balancing process, but also the platform motion modes: speed dial, uniform movement, braking. For this purpose, as external influences on the platform, in addition to the driving moments of the electric motors of the wheels and the gravity of the manipulator, frictional forces of the rolling have been taken into account, which have a fundamental influence on the methods of controlling the platform during its movement. To compile the model, the Lagrange equations for the kinetic energy of a mechanical system with geometric constraints and two degrees of freedom determined by the coordinates: the angular position of the platform and the angular position of the wheels were used. A detailed presentation of the intermediate calculations is given, allowing to modify the obtained model for various versions of balancing platforms.

References

1. Vasiljev E.M., Prokofieva D.M. Fuzzy control of structurally unstable objects // Bulletin of the Voronezh State Technical University. - 2012. - Vol. 8, No. 10.1. - P. 8-12.
2. Fedorov D.S. Development of a system for stabilizing the deflection angle of a balancing robot / D.S. Fedorov, A.Yu. Ivoilov, V.A. Zhmud, V.G. Trubin // Automation and software engineering. - 2015. - №2 (12). - P. 16-34.
3. Kornilov A.N., Lipatnikov N.G., Khizhnyakov Yu.N. Development of a control system “segway” based on an adaptive fuzzy regulator // Herald of the Perm National Research Polytechnic University. Series “Electrical Engineering, Information Technologies, Control Systems”. - 2016. - №19. - P. 69-79.