

ЭКСТРЕМУМ РЕВЕРСИОННО ВОССТАНОВЛЕННОГО ФУНКЦИОНАЛА ОПТИМАЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОБЪЕКТА

Бохонский А.И.¹, Варминская Н.И.²

¹Севастопольский государственный университет,

²Черноморское высшее военно-морское ордена Красной Звезды училище
имени П.С. Нахимова, г. Севастополь

Ключевые слова: оптимальное движение, функционал-критерий, реверсионный принцип оптимальности (РПО), достаточные условия экстремума функционала.

Аннотация. При использовании реверсионного конструирования найдено оптимальное управление перемещением объекта, восстановлен функционал-критерий с проверкой достаточных условий экстремума (Якоби, Вейерштрасса и Лежандра). Построена зависимость функционала от параметра варьирования функций, образующих поле экстремалей; подтверждено существование минимума.

Введение

Методам решения задач синтеза оптимальных управлений посвящена литература [1-3] и др. Оптимальное управление переносным движением упругих систем исследовано в [4-7]; показано, что управление позволяет за минимально возможное время при быстром перемещении объектов достичь в конечном состоянии абсолютного покоя, как суперпозиции переносного и относительного движений. Продолжают оставаться актуальными задачи проверки достаточных условий оптимальности сконструированных функционалов.

Алгоритм реализации РПО иллюстрируется на примере.

1. Формулирование цели движения

$$S_e(0) = 0, \quad \dot{S}_e(0) = 0, \quad S_e(T) = L, \quad \dot{S}_e(T) = 0, \quad (1)$$

где $S(t)$ – перемещение; T – общее время движения; L – максимальное расстояние. Необходимо: найти управление ($U(t) = \ddot{S}(t)$), которое переместит объект из исходного в конечное состояние покоя.

2. Движение – в виде полинома:

$$S(t) = \sum_{i=1}^b C_i t^{i-1}, \quad (2)$$

где $C_1 \dots C_b = \text{const}$; $\frac{ds}{dt} = V(t)$, $\frac{dV}{dt} = U(t)$.

3. Условия, характеризующие кососимметричность управления:

$$U(0) = a, \quad U(T) = -a, \quad \frac{dU}{dt} \left(\frac{T}{2} \right) = 0, \quad \int_0^{T/2} U(t) dt + \int_{T/2}^T U(t) dt = 0. \quad (3)$$

4. Константы найдены из системы алгебраических уравнений (2) и (3). После факторизации полиномов:

$$U = \frac{a(T-2t)^3}{T^3}, \quad V = \frac{10Lt(T-t)(2t^2 - 2Tt + T^2)}{T^5},$$

$$S = \frac{Lt^2(5T^3 - 10T^2t + 10t^2T - 4t^3)}{T^5}. \quad (4)$$

Графики перемещения $S(t)$, скорости $V(t)$ и ускорения (управления) $U(t)$ при $L = 1$ м, $T = 1$ с изображены на рисунке 1.

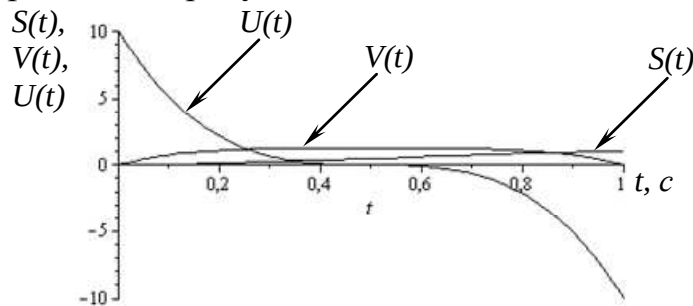


Рис. 1. Графики перемещения, скорости и ускорения

Для перемещения $S(t)$ уравнение Эйлера имеет вид:

$$\frac{d^6 S(t)}{dt^6} = 0. \quad (5)$$

5. Уравнению (5) соответствует восстановленный функционал

$$J = \int_0^T \left(\frac{d^3 S(t)}{dt^3} \right)^2 dt \quad \text{или} \quad J = \int_0^T (\dot{U})^2 dt. \quad (6)$$

Для данного примера выполнена проверка условий достаточности экстремума сконструированного функционала-критерия (6).

6. Использование уравнения Якоби.

Для функционала (6):

$$\left[F_{UU} - \frac{d}{dt} F_{U\dot{U}} \right] \chi(t) - \frac{d}{dt} [F_{\dot{U}\dot{U}} \dot{\chi}(t)] = 0. \quad (7)$$

После преобразований из (7) следует:

$$\dot{\chi}(t) = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) имеет решение: $\chi(t) = C_1 t + C_2$.

При $\chi(0) = 0$, $C_2 = 0$ и $\chi(t) = C_1 t$. Функция $\chi(t)$ обращается в нуль только при $t=0$, условие выполнено. Если $C_1 \neq 0$, то $\chi(t) = C_1 t \neq 0$ для всех $T/2 > t \geq 0$, что подтверждает выполнение условия Якоби.

7. Проверка экстремума функционала по условию Вейерштрасса.

Для функционала (6) функция Вейерштрасса:

$$E(t, U, p) = F(t, U) - F(t, p) - (U - p)F_p(t, p) = \dot{U}^2 - p^2 - 2p\dot{U} + p^2 = (\dot{U} - p)^2. \quad (9)$$

Так как $(\dot{U} - p)^2 \geq 0$, то условие Вейерштрасса, подтверждающее минимум функционала, выполнено.

8. Условие Лежандра

$$F_{\dot{U}\dot{U}} = 2 > 0 \quad (10)$$

выполнено, функционал имеет слабый минимум.

9. При графической оценке экстремума восстановленного функционала использованы вариации функций $S(t)$ в поле экстремалей, в окрестности

«скелетной кривой», являющейся решением уравнения Эйлера. В полиноме, описывающем движение, принято

$$S(T/2) = L/2 + e, \quad (11)$$

где малый параметр e характеризует отклонение кривых сравнения от «скелетной кривой»; значению $e = 0$ соответствует «скелетная кривая».

При $e \neq 0$ использован полином

$$S(t) = \sum_{i=3}^7 C_i t^{i-1}. \quad (12)$$

После реализации алгоритма конструирования получено:

$$S(t) = \frac{t^2}{T^6} (5LT^4 - 64T^3et - 10T^2Lt + 192T^2et^2 + 10T^2Lt^2 - 192Tet^3 - 4TLt^3 + 64et^4). \quad (13)$$

В случае $e = 0$ выражения для перемещения $S(t)$, скорости $V(t)$ и ускорения $U(t)$ соответствуют (4). Графики $S(t)$, $S^*(t)$ при $0,1 \geq e \geq -0,1$ изображены на рисунке 2.

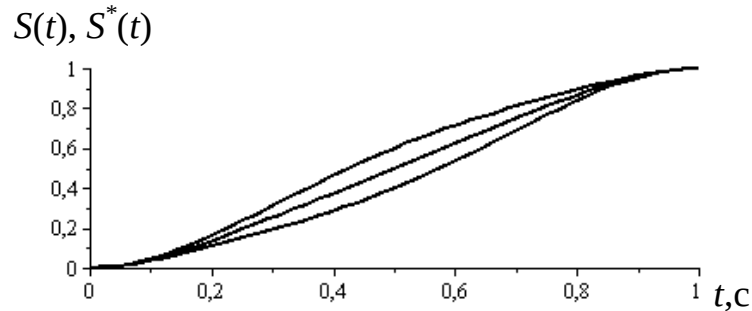


Рис. 2. Графики варьируемых функций

На рисунке 3 изображены графики $V(t)$, $V^*(t)$.

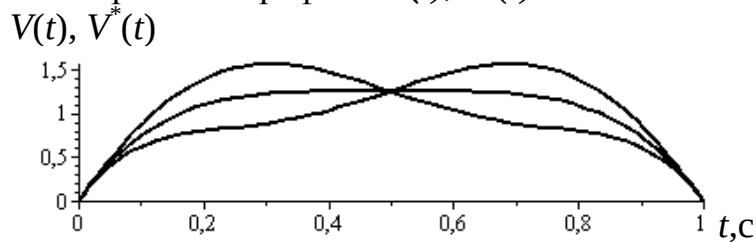


Рис. 3. Графики производных от варьируемых функций

Для $J(e)$ с использованием способа наименьших квадратов получена аналитическая функция

$$J(e) = a \cdot e + b \cdot e^2 + J_0, \quad (14)$$

в данном случае она имеет вид $J(e) = 21065,14 \cdot e^2 + 720$.

Из графика $J(e)$, изображенного на рисунке 4, следует, что экстремум достигается при $e = 0$, восстановленный функционал имеет минимум.

Для известного управления, найденного с применением классического вариационного исчисления [1], $U(t) = \frac{6L(T-2t)}{T^3}$, $V(t) = \frac{6L(Tt-t^2)}{T^2}$, энергия, затраченная на его реализацию ($m = 1$ кг), равна:

$$A = 2 \int_0^{T/2} mU(t)V(t)dt = 2,25 \text{ Дж}.$$

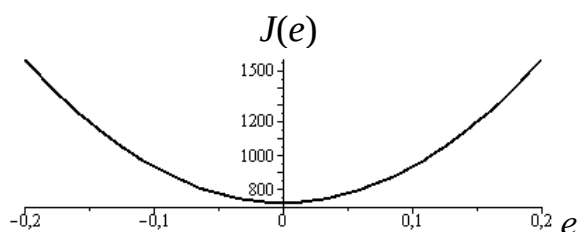


Рис. 4. Зависимость функционала от параметра варьирования функций

Энергия, затрачиваемая для реализации реверсионно найденного управления $A = 2 \int_0^{T/2} mU(t)V(t)dt = 1,5625 \text{ Дж}.$

Результаты вычисления подтверждают экономию энергии при реализации сконструированного управления.

Выводы

Для объекта с использованием алгоритма реверсионного конструирования найдено оптимальное управление типа «разгон-торможение» из исходного состояния покоя в конечное состояние покоя. Показано, что функционал-критерий принимает минимальное значение, что подтверждается использованием достаточных условий экстремума (слабого минимума). В случае упругого объекта алгоритм применим в сочетании с моментными соотношениями для поиска минимального времени движения, при котором отсутствуют колебания объекта в конце движения [5-7].

Список литературы

1. Теория автоматического управления. Ч.II. Теория нелинейных специальных систем автоматического управления. Под ред. А.А. Воронова. – М.: Высшая школа, 1997. – 288 с.
2. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: нелинейные модели. – М.: Наука, 1988. – 326 с.
3. Черноусько Ф.Л. Управление колебаниями / Ф.Л. Черноусько, П.Д. Акуленко, Б.Н. Соколов. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
4. Bokhonsky A.I. Modelling and analysis of elastic systems in motion / A.I. Bokhonsky, Y. Zolkiewski. – Gliwice: Wydawnictwo Politechniki, 2011.–171p.
5. Бохонский А.И. Вариационное и реверсионное исчисления в механике / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская. – Севастополь: СевНТУ, 2012. – 212с
6. Бохонский А.И. Актуальные задачи вариационного исчисления. – Palmarium Academic Publishing, 2013 – 77 с.
7. Бохонский А.И. Реверсионный принцип оптимальности. – М.: Вузовский учебник: ИНФРА-М, 2016. – 174 с.

Сведения об авторах:

Бохонский Александр Иванович – д.т.н., профессор, профессор кафедры технической механики и машиноведения СевГУ, г.Севастополь;

Варминская Наталья Ивановна – к.т.н., доцент, заведующая кафедрой физики и общетехнических дисциплин, ЧВВМУ им. П.С. Нахимова, г.Севастополь.

EXTREMUM REVERSION RESTORED FUNCTIONALITY OPTIMUM DISPLACEMENT OF THE OBJECT

Bohonskij A.I., Varminskaya N.I.

Keywords: optimal motion, functional-criterion, reversion optimality principle, sufficient extremum conditions.

Abstract. Using reversion optimality principle an object motion control is found and functional-criterion for the control is restored with the verification of sufficient extremum conditions (solving the Jacobi equation, verification of the Weierstrass and Legendre conditions). A graphic of the dependence of the functional on the variation parameter of the functions is constructed; the existence of the functional minimum is confirmed graphically.

References

1. Automatic control theory. Part II. Theory of nonlinear special automatic control systems. Ed. A. A. Voronov. - Moscow: Higher school, 1997. - 288 p.
2. Krutko P.D. Inverse problems of dynamics of controlled systems: nonlinear models. - Moscow: Science, 1988. - 326 p.
3. Chernousko F.L. Control of oscillations / F.L.Chernousko, P.D.Akulenko, B.N.Sokolov. – Moscow: Science, 1980. - 384 p.
4. Bokhonsky A.I. Modelling and analysis of elastic systems in motion / A.I.Bokhonsky, Y.Zolkiewski. – Gliwice: Wydawnictwo Politechniki, 2011. – 171 p.
5. Bohonskij A.I. Variational and reversion calculus in mechanics / A.I. Bohonskij, N.I. Varminskaya. – Sevastopol: SevNTU, 2012. – 212p.
6. Bohonskij A.I. Actual problems of the calculus of variations. – Palmarium academic publishing, 2013. – 77 p.
7. Bohonskij A.I. Reversional the principle of optimality. – M.: University textbook: INFRA-M, 2016. – 174 p.