

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ ШЕСТИЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА НЬЮТОНА-РАФСОНА

Кондрашов Д.А.

*Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова,
г. Санкт-Петербург*

Ключевые слова: манипулятор, обратная задача кинематики, матрица Якоби, представление Денавита-Хартенберга.

Аннотация. В статье представляется алгоритм решения обратной задачи кинематики для манипуляционного типа шарнирного типа на основе итерационного метода Ньютона-Рафсона. Приведены результаты работы алгоритма, показатели точности решения.

SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM OF THE KINEMATICS OF A SIX-LINK MANIPULATOR USING THE NEWTON-RAPHSON METHOD

Kondrashov D.A.

Baltic State Technical University «VOENMEH», Saint-Petersburg

Keywords: manipulator, inverse kinematics problem, Jacobian matrix, Denavit-Hartenberg representation.

Abstract. The article presents an algorithm for solving the inverse problem of kinematics for the manipulation type of the hinge type based on the iterative Newton-Raphson method. The results of the operation of the algorithm, indicators of the accuracy of the solution.

Введение

В настоящий момент в БГТУ «Военмех» им Д.Ф. Устинова ведется разработка универсального роботизированного устройства, изображенного на рисунке 1. Данная инициативная разработка создается по модульной технологии и предназначена для выполнения пространственных операций различной степени сложности с высокой скоростью.

Необходимым этапом разработки алгоритмов системы управления манипулятора является получение решения прямой и обратной задачи кинематики. В данной статье предложен один из способов решения обратной задачи.

Объектом исследования является манипуляционный робот шарнирного типа. Цель работы – разработка алгоритма решения обратной задачи кинематики исследуемого робота, а также получение оценки его реализации в модели робота, созданной в среде Matlab.

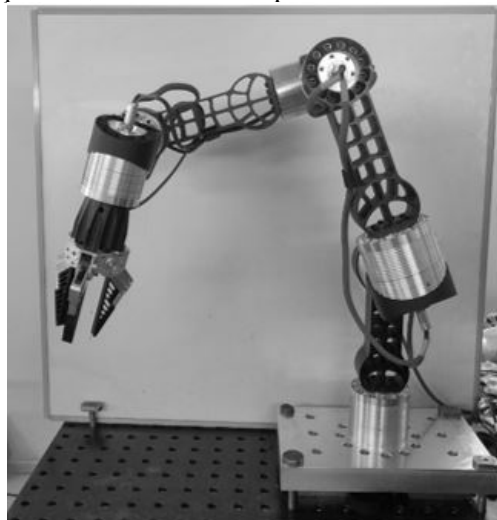


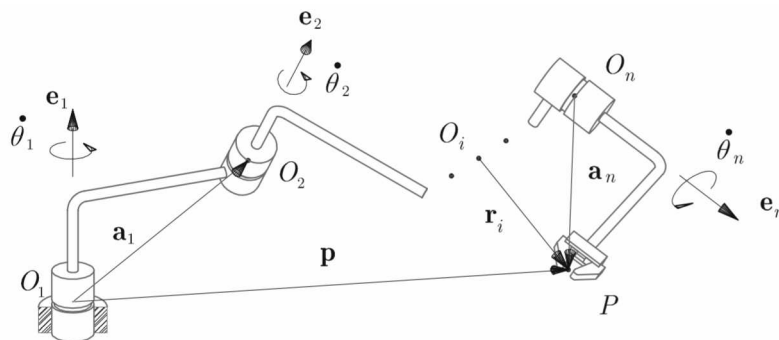
Рис. 1. Модульный манипуляционный робот

Решением обратной задачи кинематики является определение возможных присоединенных углов поворота $\theta(t)$ по известным геометрическим параметрам звеньев манипулятора и задаваемым положению схвата и его ориентации в пространстве относительно абсолютной системы координат.

Определение матрицы Якоби манипулятора

Важной особенностью применения метода Ньютона-Рафсона для решения обратной задачи кинематики манипулятора является применения матрицы Якоби этого манипулятора.

Для определения матрицы Якоби воспользуемся обобщенным n -звенным манипулятором, представленный на рисунке 2, в котором присоединенная координата θ_i , присоединенная скорость $\dot{\theta}_i$, и единичный вектор $\mathbf{e}_i$ связаны с каждой осью вращения, x_i, y_i, z_i – система координат привязанная к $(i-1)$ системе, не показана, но указано ее начало O_i [1].

Рис. 2. Обобщенный n -звенный манипулятор

Обозначим вектор угловой скорости i -ой системы обозначен ω_i , тогда мы имеем

$$\begin{aligned}\omega_0 &= 0; \\ \omega_1 &= \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1; \\ \omega_2 &= \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_2; \\ \omega_n &= \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \dot{\theta}_n \mathbf{e}_n.\end{aligned}\tag{1}$$

Из рисунка 2 легко вывести

$$\mathbf{p} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n,\tag{2}$$

где $\mathbf{p}$ обозначает позицию вектора точки P . При дифференцировании обеих сторон мы получаем

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{a}}_1 + \dot{\mathbf{a}}_2 + \dots + \dot{\mathbf{a}}_n.\tag{3}$$

Единичный вектор $\mathbf{a}_i$ фиксирован в i -й системе,

$$\dot{\mathbf{a}}_i = \omega_i \times \mathbf{a}_i; \quad i = 1, 2, \dots, n.\tag{4}$$

Подстановка уравнений (1) и (4) в (3) дает

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{a}_1 + (\dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_2) \times \mathbf{a}_2 + \dots + (\dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \dot{\theta}_n \mathbf{e}_n) \times \mathbf{a}_n,\tag{5}$$

который может быть легко переставлен как

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 \times (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n) + \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_2 \times (\mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n) + \dots + \dot{\theta}_n \mathbf{e}_n \times \mathbf{a}_n.\tag{6}$$

Теперь вектор $\mathbf{r}_i$ определяется как соединяющий O_i с P , направленный от сформированного к последнему, как изображено на рисунке 2

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{i+1} + \dots + \mathbf{a}_n.\tag{7}$$

Следовательно, $\dot{\mathbf{p}}$ может быть записан как

$$\dot{\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_i \mathbf{e}_i \times \mathbf{r}_i.\tag{8}$$

Далее запишем $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ как матрицы размерностью $3 \times n$ и определим их как

$$\mathbf{A} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n];\tag{9}$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_1, \mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{e}_n \times \mathbf{r}_n];$$

n -мерный присоединенный вектор скорости $\dot{\mathbf{q}}$ будет определен как

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dots, \dot{\theta}_n]^T.\tag{10}$$

Таким образом, $\boldsymbol{\omega}$ и $\dot{\mathbf{p}}$ могут быть выражены в более компактной форме

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\theta}}; \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\theta}}.\tag{11}$$

Поворот звена будет определен как

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix}.\tag{12}$$

Поворот звена, таким образом, линейно связан с вектором присоединенной скорости $\dot{\boldsymbol{\theta}}$

$$\mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{t},\tag{13}$$

где $\mathbf{J}$ – матрица Якоби или Якобиан манипулятора. Якобиан определяется как матрица $6 \times n$, показанная ниже:

$$J = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \quad (14)$$

или

$$J = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_1 & \mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}_2 & \dots & \mathbf{e}_n \times \mathbf{r}_n \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Решение обратной задачи кинематики. Метод Ньютона-Рафсона

При решении обратной задачи кинематики манипуляционного робота по заданной матрице инструмента необходимо определить вектор обобщенных координат $q(t)$. Суть метода Ньютона-Рафсона при решении обратной задачи сводится к следующему: значение вектора q_{k+1} на $k+1$ -ом шаге итерационного процесса вычисляется по следующей формуле:

$$q_{k+1} = q_k + J^{-1} \cdot E, \quad (16)$$

где J – матрица Якоби манипулятора, $E = T^* - T$ – разница между желаемой матрицей инструмента манипулятора и действительной.

Определить матрицу инструмента манипулятора можно прибегнув к использованию преобразования Денавита-Хартенберга [3]. Для составления ДХ-преобразования необходимо определить системы координат каждого звена, что изображено на рисунке 3, и найти параметры данных систем координат. Параметры представлена в таблице 1.

После формирования ДХ-систем координат – построение однородных матриц преобразования, связывающих i -ю и $(i-1)$ -ю системы координат звеньев. Операции поворота оси z_{i-1} на угол θ_i , сдвиг начала координат вдоль оси z_{i-1} на d_i , сдвиг оси x_i на a_i и поворот вокруг оси x_i на угол α_i описываются матрицами элементарных поворотов и сдвигов, а их произведение дает однородную матрицу сложного преобразования ${}^{i-1}A_i$.

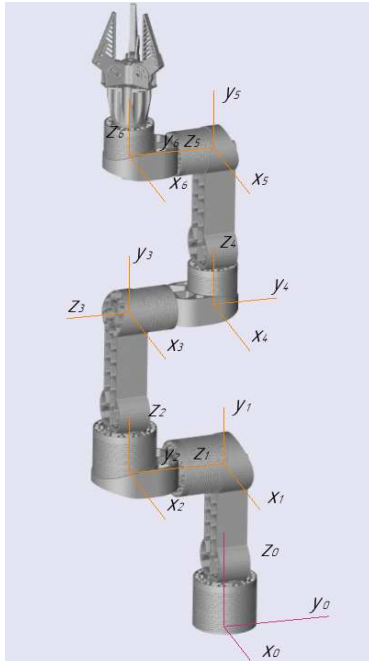


Рис. 3. Системы координат звеньев

Табл. 1. Параметры систем координат звеньев для манипуляционного робота

	θ_i	α_i	a_i	d_i
1	$q_1(t)$	$\pi/2$	0	0.25
2	$q_2(t)$	$-\pi/2$	0	0.201
3	$q_3(t)$	$\pi/2$	0	0.356
4	$q_4(t)$	$-\pi/2$	0	-0.168
5	$q_5(t)$	$\pi/2$	0	0.333
6	$q_6(t)$	$-\pi/2$	0	0.168

$${}^{i-1}A_i = T_{z,d} T_{z,\theta} T_{x,a} T_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Используя матрицу преобразования ${}^{i-1}A_i$ можно связать однородные координаты рабочего органа с абсолютной системой координат. На основе представленного выражения и параметров таблицы 1 формируется решение прямой задачи кинематики семизвенового робота [2].

$$T(q) = {}^0A_1(q_1) {}^1A_2(q_2) {}^2A_3(q_3) {}^3A_4(q_4) {}^4A_5(q_5) {}^5A_6(q_6) {}^6A_7(q_7). \quad (18)$$

Для примера работы алгоритма, зададим несколько положений инструмента через декартовы координаты пространства и угла Эйлера ($P^I = (0.3, 0.3, 0.5, 0, 0, 0)$, $P^{II} = (-0.1, 0.25, 0.6, 1.5, 0.6, 0)$, $P^{III} = (-0.3, -0.4, 0.6, 1.5, 0.6, -1.4)$, $P^{IV} = (0, -0.1, 0.7, 0.2, 4.6, 0)$). На рисунке 4 приведены результаты работы алгоритма: положение манипулятора, норма матрицы ошибки и количество итераций, необходимых для нахождения решения, удовлетворяющего степени заданной точности.

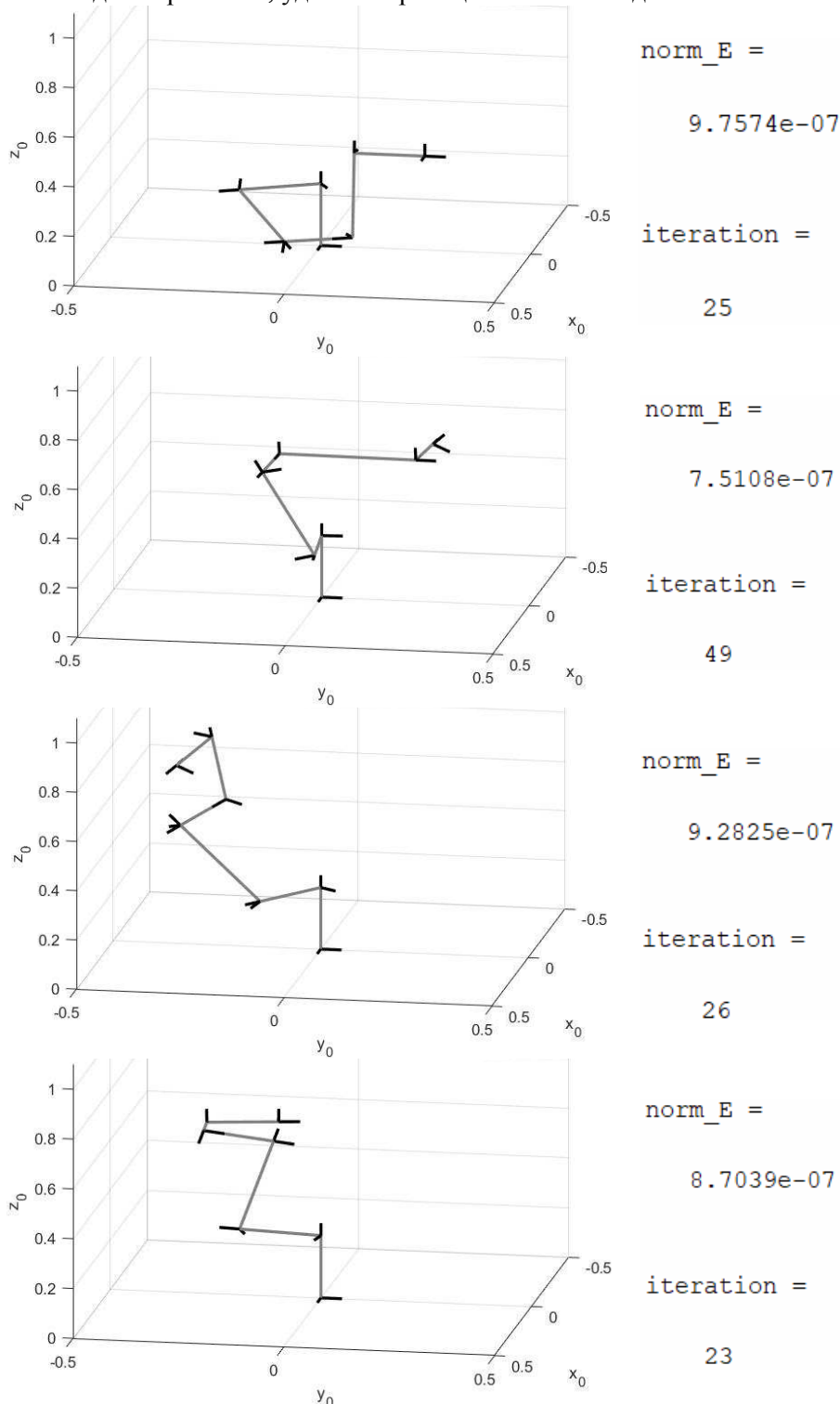


Рис. 4. Результат решения обратной задачи кинематики с использованием метода Ньютона-Рафсона

Выводы

В ходе настоящей работы с помощью программы Matlab решена обратная задачи кинематики для манипуляционного робота шарнирного типа. Для алгоритма решения обратной задачи использовался метод Ньютона-Рафсона. Метод показывает высокий показатель сходимости за относительно небольшое число итераций. Данный показатель может быть улучшен путем задания начального приближения,

например, возможно использовать нейросетевое управление, результат которого доводится данным методом до необходимой точности.

Список литературы

1. Jorge Angeles. Fundamentals of robotic mechanical systems. Theory, methods and algorithms. Fourth edition. Springer, 2010. 589p.
2. Algorithm for the formation of coordinate system of links of a robot using the representation of Denavit-Hartenberg // Молодежь. Общество. Современная наука, техника и инновации. 2018. №17. С. 77-78.
3. Фу К., Гонсалес Р., Ли К. Робототехника: пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 624 с.

Сведения об авторе:

Кондрашов Дмитрий Александрович – магистрант, БГТУ им. Д.Ф. Устинова, г. Санкт-Петербург.
