

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ РЕШЕНИЯ

Конева С.А., Цалоев В.М.

Севастопольский государственный университет, г. Севастополь

Ключевые слова: устойчивость, система с запаздыванием, теплопроводность, математическая модель, тепловой процесс.

Аннотация. Получены условия существования асимптотического решения неоднородного уравнения теплопроводности с различными коэффициентами при $t \rightarrow \infty$, удовлетворяющего однородным краевым и начальным условиям.

INVESTIGATION OF THE STABILITY OF A PARABOLIC SYSTEM WITH A DELAY BASED ON THE ANALYSIS OF THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE SOLUTION

Koneva S.A., Tsalojev V.M.

Sevastopol State University, Sevastopol

Keywords: stability, delayed system, thermal conductivity, mathematical model, thermal process.

Abstract. Conditions for the existence of an asymptotic solution of an inhomogeneous heat equation with different coefficients for satisfying homogeneous boundary and initial conditions are obtained.

В работе решаются задачи:

– сформулировать условия существования решения математической модели теплового процесса и установить его единственность;

– изучить асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$ этого решения.

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k} \right) + b \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \left(B_{jk} \frac{\partial u(x,t-\tau(t))}{\partial x_k} \right) + f(x,t), (1)$$

удовлетворяющее однородному краевому условию:

$$u(x,t) = 0, \quad x \in D \quad (2)$$

и начальному условию:

$$u(x,t) = 0, \quad t \in E_0, \quad x \in G. \quad (3)$$

Здесь $G \subset R^m$ конечная область с кусочно-гладкой границей Γ ; D -цилиндрическая поверхность с образующей Γ и направляющими, параллельными оси t ; D_1 - продолжение D на начальное множество E_0 , состоит из точки $t_0=0$ и значений $t-\tau(t)$, меньше 0 при $t \geq 0$. Матрицы $\|A_{jk}\|, \|B_{jk}\|$ положительно определены в G , их элементы не зависят от t и непрерывно дифференцируемы по $x_1, x_2, \dots, x_m$. Дифференциальные выражения

$$-\sum_{j,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k}), \quad -\sum_{j,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} (B_{jk}(x) \frac{\partial u(x,t-\tau(t))}{\partial x_k})$$

эллиптические в G ; A, B - операторы задачи Дирихле соответствующих эллиптических уравнений с однородными краевыми условиями первого типа на Γ [1]. Спектры этих операторов дискретны, их собственные значения λ_n, μ_n положительны и стремятся к бесконечности при $n \rightarrow \infty$ [2]. Полагаем, что операторы A, B коммутативны. В этом случае они имеют общую ортонормированную в $L_2(G)$ систему собственных функций $\{u_n(x)\}$. $u(t), f(t)$ - абстрактные функции, определенные для $t \geq 0$ со значениями в $L_2(G)$. Это значит, что любому фиксированному $t \geq 0$ ставится в соответствие единственный элемент $u(x, t)$ (или $f(x, t)$ из $L_2(G)$; $u(t)$ принадлежит классам $D(A), D(B)$ и энергетическим пространствам H_A, H_B , порожденным операторами A, B . Теперь задачу (1)...(3) можно записать в виде:

$$\frac{du(t)}{dt} + aAu(t) + bBu(t - \tau(t)) = f(t), \quad t \in [0, \infty]. \quad (4)$$

$$u(t) = \varphi(t), \quad t \in E_0. \quad (5)$$

Рассматривается также стационарное уравнение

$$(aA + bB)V = g, \quad (g = g(x)). \quad (6)$$

Следующая ниже теорема 1 содержит условия существования решения [2] исходной задачи. Имеется ввиду функция $u(t)$, удовлетворяющая уравнению

$$\left(\frac{du(t)}{dt} + aAu(t) + bBu(t - \tau(t)) - f(t), \eta(t) \right) = 0,$$

где $\eta(t)$ - абстрактная функция со значениями в H_A, H_B . Выполнено построение этого решения методом Фурье с обоснованием метода. Слабое решение задачи (4),(5) строится в форме суммы ряда

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) u'_n, \quad (7)$$

коэффициенты которого определяются из уравнений

$$C'_n(t) + a\lambda_n C_n(t) + b\mu_n(t - \tau(t)) - f_n(t) = 0, \quad (8)$$

при условиях

$$C_n(t) = 0, \quad t \in E_0. \quad (9)$$

Здесь $C_n(t) = (u(x, t), u_n(x))$, $f_n(t) = (f(x, t), u_n(x))$.

Решение задачи (8),(9) существует [3]. Решение исходной задачи принадлежит классам $C([0, \infty[, L_2(G))$, $C([0, \infty), H_A, H_B)$, $C^{(1)}([0, \infty[, L_2(G))$.

Теорема 1. Пусть

$a > |b|$ и $A > B$ (т.е. $A - B$ - положительно определен);

$$\int_0^{\infty} \|f(t)\|^2 dt < \infty;$$

$$Af \in L_2(G).$$

Тогда сумма ряда (7) является слабым решением задачи (4),(5).

Доказательству теоремы предположим лемму.

Лемма 1. В условиях теоремы 1 справедливы следующие оценки

$$C_n^2(t) \leq \frac{a}{2\lambda_n(a-|b|)} \int_0^\infty f_n^2(t) dt. \quad (10)$$

Доказательство теоремы 1 сводится к проверке следующих положений:

- 1) ряд (7) в метрике $L_2(G)$ сходится равномерно по t для $t \geq 0$;
- 2) ряд (7) сходится равномерно по t для $t \geq 0$ в метриках H_A, H_B ;
- 3) ряд, полученный почленным дифференцированием по t ряда (7), сходится равномерно по t при $t \geq 0$ в $L_2(G)$.

(Доказательство леммы и теоремы 1 в работе не приводим).

Теорема 2 (основная). Пусть

$$\|f(t) - g\| \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty;$$

$$\int_0^\infty \tau^2(t) dt < \infty;$$

$$\int_0^\infty \|f'(t)\|^2 dt < \infty$$

тогда слабое решение задачи (1)...(3) стремится к слабому решению уравнения (6) в метрике $L_2(G)$.

Условия теоремы 1 предполагаются выполненными.

Доказательство теоремы 2

Запишем в форме ряда решение уравнения (6):

$$v(x) = \sum_{n=1}^\infty v_n u_n(x); \quad v_n = (v, u_n); \quad v_n = \frac{g_n}{a\lambda_n + b\mu_n}; \quad g_n = (g, U_n).$$

Переписывая уравнение (8) в форме

$$C_n'(t) + (a\lambda_n + b\mu_n)C_n(t) = b\mu_n [C_n(t) - C_n(t - \tau(t))] + f_n(t),$$

с учетом нулевых начальных условий для $C_n(t)$, находим

$$\begin{aligned} C_n(t) &= b\mu_n \int_0^t e^{-(a\lambda_n + b\mu_n)(t-s)} [C_n(s) - C_n(s - \tau(s))] ds + \\ &+ \int_0^t e^{-(a\lambda_n + b\mu_n)(t-s)} f_n(s) ds. \end{aligned} \quad (11)$$

Перейдем к оценке $\|u(t) - v\|$.

$$\begin{aligned} \|u(t) - v\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^\infty C_n(t) u_n - \sum_{n=1}^\infty v_n u_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^\infty (C_n - v_n)^2 = \\ &= \sum_{n=1}^\infty (\overline{C}_n + \overline{\overline{C}}_n - v_n)^2 \leq 2 \sum_{n=1}^\infty \overline{C}_n^2 + 2 \sum_{n=1}^\infty (\overline{\overline{C}}_n - v_n)^2, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\overline{C}_n, \overline{\overline{C}}_n$ - первое и второе слагаемое правой части (11). Во втором из этих слагаемых выполняется интегрирование по частям

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{C}_n - v_n)^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(a\lambda_n + b\mu_n)} (g_n - f_n(t) + f_n(0)) e^{-(a\lambda_n + b\mu_n)t} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\int_0^t f_n^2(s) e^{-(a\lambda_n + b\mu_n)(t-s)} ds \right)^2 \right) \leq \frac{3}{\mu_1^2(a+b)^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (g_n - f_n(t))^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2(a\lambda_n + b\mu_n)t} f_n^2(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-(a\lambda_n + b\mu_n)(t-s)} f_n'(s) ds \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим отдельно каждую сумму в правой части неравенства (13).

$$\sum_{n=1}^{\infty} (g_n - f_n(t))^2 = \|f(t) - g\|^2 \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad \text{по условию};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(a\lambda_n + b\mu_n)t} f_n^2(0) \leq e^{-2(a+b)\mu_1 t} \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(0) =$$

$$= e^{-2(a+b)\mu_1 t} \|f(0)\|^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty;$$

$$\left(\int_0^t f_n'(s) e^{-(a\lambda_n + b\mu_n)(t-s)} ds \right)^2 \leq \frac{e^{-2(a+b)\mu_1(t-\bar{t})}}{\mu_1(a+b)} \times$$

$$\times \int_0^{\bar{t}} f_n'^2(s) ds + \frac{1}{\mu_1(a+b)} \int_{\bar{t}}^{\infty} f_n'^2(s) ds.$$

В преобразованиях использовано неравенство Коши - Буняковского; $\bar{t} > 0$. Теперь последнее слагаемое в правой части (13) оценивается суммой:

$$\begin{aligned} &\frac{3e^{-2(a+b)\mu_1(t-\bar{t})}}{\mu_1^3(a+b)^3} \sum_{n=10}^{\infty} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}} f_n'^2(s) ds + \frac{3}{\mu_1^3(a+b)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\bar{t}}^{\infty} f_n'^2(s) ds = \\ &= \frac{3e^{-2(a+b)\mu_1(t-\bar{t})}}{\mu_1^3(a+b)^3} \int_0^{\bar{t}} \|f'(s)\|^2 ds + \frac{3}{\mu_1^3(a+b)} \int_{\bar{t}}^{\infty} \|f'(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Первое слагаемое справа за счет экспоненциального множителя при $t \geq t_0$ (t_0 -достаточно велико) может быть меньше $\frac{\varepsilon}{2} \forall \varepsilon > 0$. Из условия 3) теоремы 2 следует возможность выбора $\bar{t}$ настолько большим, что

$$\frac{3}{\mu_1^3(\varepsilon + b)^3} \int_{\bar{t}}^{\infty} \|f'(s)\|^2 ds \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad \text{Следовательно, } \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{C}_n - v)^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим первую сумму в правой части неравенства (12). Нетрудно проверить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (\bar{C}_n^2(t))$.

Тогда $\bar{C}_n^2(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, или

$$\bar{C}_n^2(t) = b^2 \mu_n^2 \left(\int_0^t e^{-(a\lambda_n + b\mu_n)(t-s)} [C_n(s) - C_n(s - \tau(s))] ds \right)^2.$$

Так как $b^2 \mu_n^2 \rightarrow \infty$, то при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю интеграл в выражении для $\bar{C}_n^2(t)$. Убедиться, что $\forall n$ этот интеграл стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

$$\left(\int_0^t e^{-(a\lambda_n + b\mu_n)(t-s)} [C_n(s) - C_n(s - \tau(s))] ds \right)^2 \leq \frac{e^{-2\mu_1(a+b)(t-\bar{t})}}{\mu_1(a+b)} \times \\ \times \int_0^{\bar{t}} C_n'^2(\bar{s}) \tau^2(s) ds + \frac{1}{\mu_1(a+b)} \int_t^\infty C_n'^2(\bar{s}) \tau^2(s) ds.$$

Использованы построения, аналогичные только что выполненным. Для завершения рассуждений остается отметить ограниченность $C_n'^2(s)$ и сослаться на условие 2) теоремы 2.

Таким образом, теорема 2, утверждающая стабилизацию решения задачи (1)-(3) при $t \rightarrow \infty$ и свидетельствующая об асимптотической устойчивости, доказана.

Список литературы

1. Барабанов А.Т., Конева С.А. Задача анализа устойчивости системы автоматического регулирования конвективного теплообмена // Динамические системы. – Симферополь: Таврия, 2004. – Вып. 18. – С.14-22.
2. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высш. школа, 1977. – 423с.
3. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971. – 296 с.

Сведения об авторах:

Конева Светлана Андреевна – к.т.н., доцент, заведующий кафедрой «Судовое электрооборудование», СевГУ, Севастополь;

Цалоев Владимир Муратович – доцент кафедры «Судовое электрооборудование», СевГУ, Севастополь.