

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ SD БАЛОК БУРОВЫХ И ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНЫХ ВЫШЕК

Волошинова Т.В., Лачугин Д.В., Намазов М.Е.

Санкт-Петербургский государственный университет, г.Санкт-Петербург

Ключевые слова: упругость, пластичность, изгиб, балка, SD эффект, прогиб.

Аннотация. Освоение шельфа Северного Ледовитого океана ставит новые задачи проектирования конструкций буровых и геологоразведочных вышек, платформ для нефтедобычи и др. Основными составляющими таких конструкций являются металлические балки и стержни, работающие на изгиб. В работе построена математическая модель упругопластического изгиба горизонтальной и вертикальной балок. Выведены уравнения прогиба, построены графики зависимости прогиба от продольной координаты.

ELASTIC-PLASTIC BENDING OF SD BEAMS OF DRILLING AND EXPLORATION RIGS

Voloshinova T.V., Lachugin B.V., Namazov M.E.

Saint-Petersburg state university, Saint-Petersburg

Keywords: elasticity, plasticity, bend, beam, SD effect.

Abstract. The development of the Arctic Ocean shelf poses new challenges in designing structures for drilling and exploration towers, platforms for oil production, etc. The main components of such structures are metal beams and bending rods. A mathematical model of elastic-plastic bending of horizontal and vertical beams was built. The deflection equations are derived, and the curves of the dependence of the deflection on the longitudinal coordinate are plotted.

Постановка задачи

Рассматриваются две задачи об упругопластическом изгибе горизонтальной и вертикальной консольных балок постоянного прямоугольного сечения при чистом изгибе моментом или изгибе сосредоточенной следящей нагрузкой на свободном конце.

В такой постановке задачи для изотропных, равнопрочных балок рассмотрены в [1-3]. В нашем случае считаем, что материал балок обладает эффектом SD, а именно: при упругом деформировании растяжение или сжатие происходит с одинаковым модулем упругости, переход в пластическое состояние происходит при различных пределах текучести для напряжений растяжения или сжатия, при пластическом деформировании материал считаем пластически анизотропным [4,5].

Рассмотрим горизонтальную консольную балку прямоугольного сечения толщиной $2h$, шириной b и длиной L , изгибающуюся при воздействии постоянного момента M , изгиб балки происходит в плоскости xoz (рис. 1).

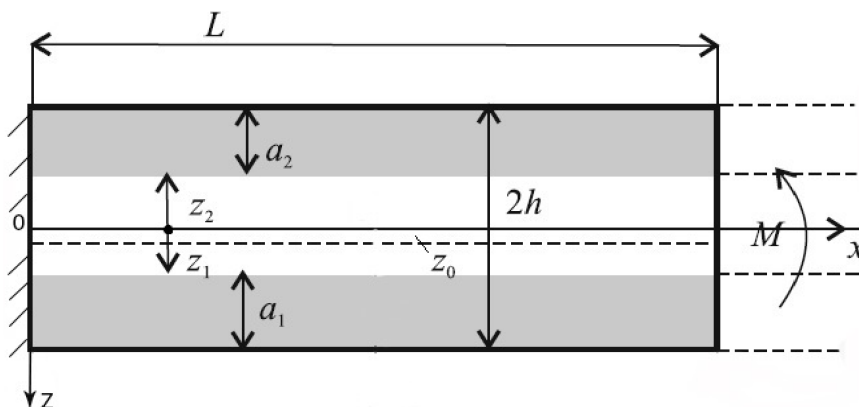


Рис. 1. Схема изгиба консольной балки постоянным моментом

На рис. 1 области, которые находятся в пластическом состоянии, заштрихованы. Предположение об эффекте SD балки приводит к нарушению симметрии при развитии пластических деформаций, следовательно, имеет место смещение нейтральной оси по сравнению со средней геометрической. Поэтому введем смещение z_0 и величины z_1 , z_2 , которые будут характеризовать расстояния от нейтральной оси до границы раздела упругой и пластической частей балки в областях растяжения и сжатия. Продольное напряжение при чистом изгибе не зависит от x , поэтому линии раздела пластических и упругого состояний являются прямыми. В дальнейшем будем считать, что предел текучести при растяжении меньше предела текучести при сжатии. Введем новый параметр d как отношение предела текучести при сжатии одномерного образца σ_s к пределу текучести при растяжении σ_e , т.е. $d \geq 1$.

Рассмотрим изгиб вертикальной консольной опоры прямоугольного сечения при воздействии боковой сосредоточенной силы P на свободном конце, которая, в частности, может моделировать воздействие ледового покрытия (рис. 2).

Для исследования влияния веса балки на процесс упругопластического изгиба введем модифицированный параметр, а именно

$$\tilde{d} = \frac{\sigma_s - \gamma L}{\sigma_t + \gamma L}, \quad (1)$$

где γ – удельный вес материала балки.

Распределение напряжения σ_x в сечении балок показано на рис. 3: а) горизонтальная балка с двумя зонами текучести; б) вертикальная балка.

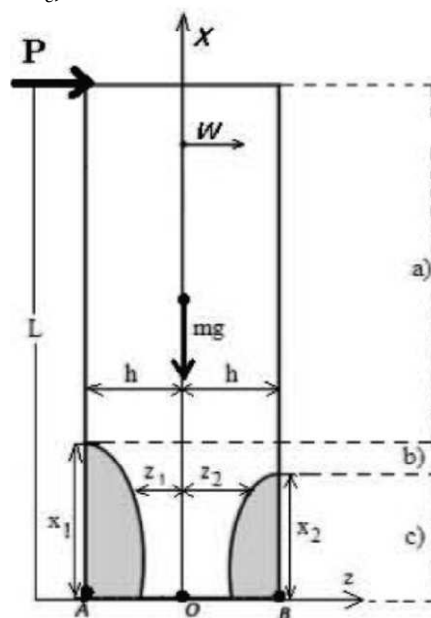


Рис. 2 Схема изгиба вертикальной балки силой P

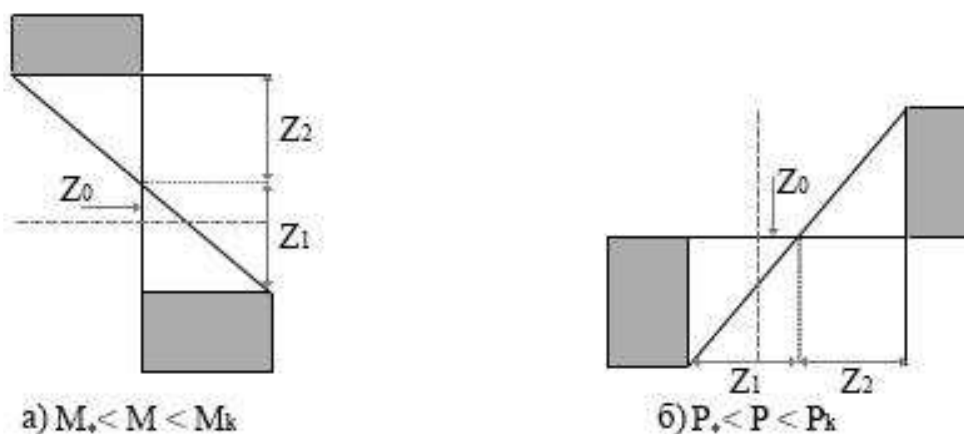


Рис. 3. Распределение напряжения σ_x

На рис. 3 введены обозначения M_t , M_* , M_k , которые будут определены ниже.

Выпишем уравнение зависимости смещения нейтральной оси z_0 от параметра d и от толщины упругого слоя при растяжении [2]

$$z_0 = \frac{h(d-1)}{d+1} - \frac{z_1(d-1)}{2}. \quad (2)$$

Видим, что смещение z_0 зависит линейно от толщины упругого слоя в области растяжения z_1 и не зависит от положения балки и от типов нагрузки.

Основные соотношения

Момент в сечении x в самом общем виде, выводится в предположении условия равновесия всех сил

$$\begin{aligned} \tilde{M}(x) = b & \left[\int_{z_1}^{h+z_0} (\sigma_t - \gamma(L-x))zdz + \int_0^{z_1} (Ezk - \gamma(L-x))zdz + \right. \\ & \left. + \int_0^{z_2} (Ezk + \gamma(L-x))zdz + \int_{z_2}^{h-z_0} (\sigma_s + \gamma(L-x))zdz \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Интегрируем (3) и получаем

$$\tilde{M}(x) = b(\sigma_t - L\gamma) \left(\frac{(h+z_0)^2}{2} - \frac{z_1^2}{2} \right) + b(\sigma_s + L\gamma) \left(\frac{(h-z_0)^2}{2} - \frac{z_2^2}{2} \right) + bEk \left(\frac{z_1^3}{3} + \frac{z_2^3}{3} \right). \quad (4)$$

В случае без учета веса имеем

$$M(x) = b\sigma_t \left(\frac{(h+z_0)^2}{2} - \frac{z_1^2}{2} \right) + b\sigma_s \left(\frac{(h-z_0)^2}{2} - \frac{z_2^2}{2} \right) + bEk \left(\frac{z_1^3}{3} + \frac{z_2^3}{3} \right). \quad (5)$$

Таким образом, мы определили внутренний изгибающий момент, который зависит от переменных z_0 , z_1 , z_2 . Приравнявая внутренний изгибающий момент внешнему постоянному моменту M , получаем уравнение равновесия, при интегрировании которого определяется функция прогиба.

Пусть $\tilde{M}_t$ – общий момент относительно нейтральной оси, при котором образуется первая зона пластичности при растяжении, $\tilde{M}_*$ – общий момент относительно нейтральной оси, при котором образуются вторая зона пластичности. $\tilde{M}_k$ – общий момент относительно нейтральной оси, при котором в нижнем защемленном сечении балки пластические зоны смыкаются, образуя пластический шарнир. M_t , M_* , M_k – аналогичные моменты, только без учета веса. Зависимость моментов от параметра d определяется равенствами.

$$\tilde{M}_t = \frac{2}{3} h^2 b (\sigma_t + \gamma L), \quad (6)$$

$$\tilde{M}_* = \frac{3\tilde{d} - 1}{\tilde{d} + 1} \tilde{M}_t, \quad (7)$$

$$\tilde{M}_k = \frac{2bh^2\tilde{d}\sigma_t}{\tilde{d} + 1}. \quad (8)$$

Воспользуемся условием непрерывности напряжения σ_x на границе упругой и пластических областей при растяжении и сжатии:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = Ez_1\chi = \sigma_e, \quad \sigma_x = E\varepsilon_x = Ez_2\chi = \sigma_s, \quad (9)$$

где χ – кривизна нейтральной оси балки, а также воспользуемся известным соотношением между кривизной и прогибом в линейной теории $k = \frac{d^2 w}{dx^2}$ и получим дифференциальное уравнение для нахождения прогиба для каждого случая а), б), в) с учетом веса (см. рис. 2)

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \begin{cases} \frac{M}{EI}, & x_1 \leq x \leq L, \\ \left(\frac{2M_t}{M_k(\bar{d} + 1)\bar{d}^{-1} - M} \right)^2 \cdot \frac{\sigma_t - (L - x)\gamma}{Eh}, & x_2 \leq x \leq x_1, \\ \left(\frac{2M_t}{M_k(\bar{d} + 1)\bar{d}^{-1} - M} \right)^2 \cdot (1 + \bar{d})^{3/2} \frac{\sigma_t - (L - x)\gamma}{Eh}, & 0 \leq x \leq x_2. \end{cases} \quad (10)$$

Дифференциальные уравнения для определения прогиба вертикальной консоли при учете влияния веса имеют вид, характерный для уравнений Эйлера. Уравнения такого рода решаются численно. Аналитически можно решить только первое уравнение для упругой балки с помощью специальных функций, аналогичным специальным функциям Бесселя, а именно с использованием функций Ари (Эйри).

Дифференциальное уравнение (10) без учета веса в задаче с вертикальной балкой можно решить аналитически для любых случаев и выглядит следующим образом:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \begin{cases} \frac{3P(L-x)}{2h^3 bE}, & x_1 \leq x \leq L, \\ \frac{\sigma_t}{Eh \left(\frac{3}{2} - \frac{3P(L-x)}{4b\sigma_t h^2} \right)^2}, & x_2 \leq x \leq x_1, \\ (1+d)^{3/2} \left(\frac{48d}{d+1} - \frac{24P(L-x)}{b\sigma_t h^2} \right)^{-1/2} \frac{\sigma_t}{Eh}, & 0 \leq x \leq x_2. \end{cases} \quad (11)$$

Решив дифференциальное уравнение (11) для разных областей, получим

$$w(x) = \begin{cases} \frac{3P}{2bEh^3} \cdot \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) + C_5 x + C_6, & x_1 \leq x \leq L, \\ \frac{-k_0}{\tilde{b}^2} \ln \left(1 + \frac{\tilde{b}}{a} x \right) + \frac{k_0 x}{a\tilde{b}} + C_3 x + C_4, & x_2 \leq x \leq x_1, \\ \frac{4a_1(b_1 + c_1 x)^{3/2} - 4a_1 b_1^3}{3c_1^2} - \frac{2a_1 \sqrt{b_1} x}{c_1}, & 0 \leq x \leq x_2. \end{cases} \quad (12)$$

Константы интегрирования C_3, C_4, C_5, C_6 определяются из условия непрерывности прогиба и угла поворота сечения при $x=x_1, x=x_2$, а так же граничного условия жесткой заделки в основании вертикальной балки.

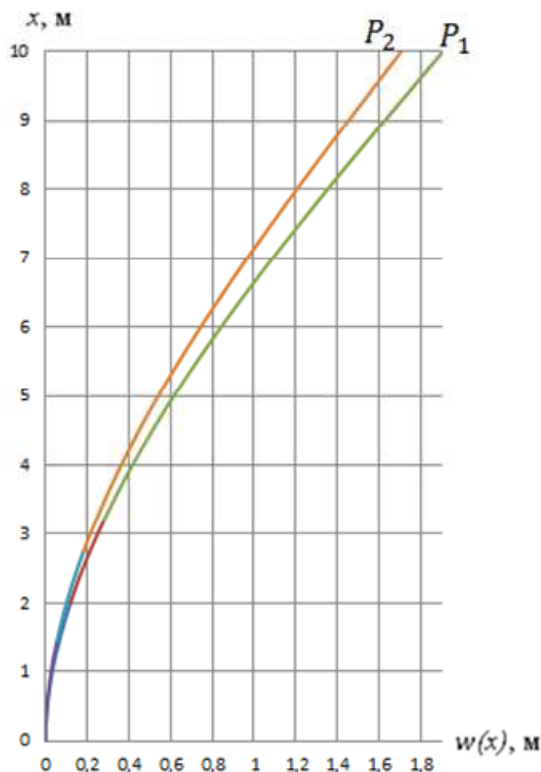
$$\begin{aligned} w_y(x_2) &= w_{1n}(x_2), & w_{2n}(x_1) &= w_{1n}(x_1), \\ \frac{dw_y}{dx}(x_2) &= \frac{dw_{1n}}{dx}(x_2), & \frac{dw_{2n}}{dx}(x_1) &= \frac{dw_{1n}}{dx}(x_1). \end{aligned} \quad (13)$$

Задача определения прогиба горизонтальной балки решается на основе (6) при $\gamma=0$, и имеет вид

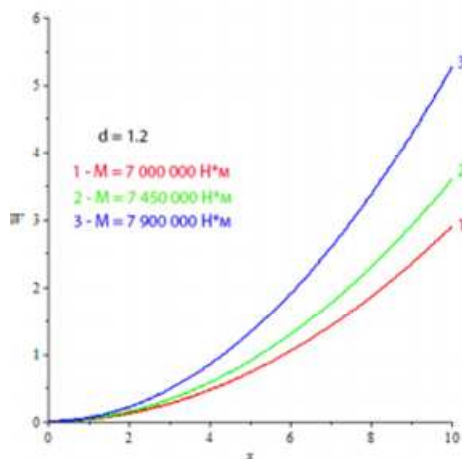
$$w(x) = \begin{cases} \frac{3M}{2bEh^3} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2, & 0 \leq M \leq M_t, \\ \frac{x^2}{2} \cdot \frac{\sigma_e}{Eh} \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{3M}{4M_0} \right)^{-2} + C_3 x + C_4, & M_t \leq M \leq M_*, \\ (1+d)^{3/2} \left(\frac{48d}{d+1} - \frac{24M}{M_0} \right)^{-1/2} \frac{x^2}{2} + C_5 x + C_6, & M_* \leq M \leq M_k. \end{cases} \quad (14)$$

На рисунке 4 приведен результат расчета по формулам (14) для значений $P_1 = 0.150MN$, $P_2 = 0.140MN$.

Анализ графиков показывает существенное изменение прогиба при увеличении воздействующих нагрузок или момента.



а)



б)

Рис. 4. Изменение прогиба при увеличении: а) боковой нагрузки; б) момента

Заключение

В качестве общего вывода можно констатировать, что несмотря на сложную постановку задачи, пластическую анизотропию и упругопластический характер изгиба, задачу удастся решить аналитически, кроме случая тяжелой опоры при упругопластическом изгибе. Аналитическое решение всегда обеспечивает точный прогноз по напряжениям деформациям и прогибам балки [6,7] и является основанием для технического проектирования и оптимального подбора сечений и размеров балок, согласно технического проекта буровых конструкций.

Список литературы

1. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 324 с.
2. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости / Пер. с англ. М.И. Рейтмана; Под ред. Г.С. Шапиро. – М.: Наука, 1975. – 575 с.
3. Павилайнен Г.В. К вопросу упруго-пластического деформирования конструкций // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 1992. Вып. 1. С. 67-73.
4. Павилайнен Г.В. Математическая модель задачи изгиба пластически анизотропной балки // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2015. Т. 2(60). Вып. 4. С. 633-638.
5. Павилайнен Г.В., Бембеева А.И., Канин М.С. Упруго-пластический изгиб разнопрочных балок // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2014. Т. 1(59). Вып. 2. С. 284-291.
6. Намазов М.Е. Упруго-пластический изгиб горизонтальных SD балок // Современные проблемы теории машин. – 2017. – №5. – С. 88-94.

7. Лачугин Д.В. Упруго-пластический изгиб разнопрочной вертикальной консоли под действием сосредоточенной нагрузки на свободном конце // Российско-китайский научный журнал «Содружество». 2016. №2(2). Часть 3. С. 32.

References

1. Kachanov L.M. Fundamentals of the theory of plasticity. M.: Gostekhizdat, 1956. 324 p.
2. Tymoshenko S.P., Gudier J. Elasticity theory / Tr. by Eng. M.I. Reitman; Ed. G.S. Shapiro. – M.: Science, 1975. – 575 p.
3. Pavilainen G.V. On the question of elastic-plastic deformation of structures // News of SPb. Un-ty. Ser. 1. 1992. Issue. 1. P. 67-73.
4. Pavilainen G.V. Mathematical model of the bending problem of plastically anisotropic beam // News of SPb. Un-ty. Ser. 1. 2015. Vol. 2(60). Issue. 4. P. 633-638.
5. Pavilaynen G.V., Bembeeva A.I., Kanin M.S. Elastic-plastic bending of different girders // News of SPb. Un-ty. Ser. 1. 2014. Vol. 1(59). Issue. 2. P. 284-291.
6. Namazov M.E. Elastic-plastic bending of horizontal SD beams // Modern problems of machine theory. – 2017. – №5. – P. 88-94.
7. Lachugin D.V. Elastic-plastic bending of a multi-strength vertical console under the action of a concentrated load on the free end // Russian-Chinese scientific journal "Commonwealth". 2016. №2(2). Part 3. P. 32.

Сведения об авторах:

Information about authors:

Волошинова Татьяна Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент	Voloshinova Tatyana Viktorovna – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor
Лачугин Даниил Владимирович – аспирант	Lachugin Daniil Vladimirovich – postgraduate
Намазов Маил Елдар оглы – аспирант, namazov.mail@mail.ru	Namazov Mail Eldar ogli – postgraduate, namazov.mail@mail.ru
Санкт-Петербургский государственный университет, г.Санкт-Петербург	Saint-Petersburg state university, Saint-Petersburg

Получена 02.04.2019