

БЕСКОЛЕБАТЕЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ МНОГОМАССОВЫХ УПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ

Проурзин В.А.

*Институт проблем машиноведения Российской Академии Наук,
г.Санкт-Петербург*

Ключевые слова: упругие колебания, гашение колебаний, управление, бесколебательность, формирующий фильтр.

Аннотация. Поставлена и решена задача управления движением упругого объекта таким образом, чтобы полностью подавить его собственные колебания. Такой режим перемещения и реализующее его управление названы бесколебательными. Бесколебательный режим движения упругой системы определяется с помощью ограничений на значения остаточного спектра и коэффициента динамичности. Для реализации бесколебательного управления формируется начальное "жесткое" управление перемещением центра масс упругого объекта, например, управление, оптимальное по быстродействию. Далее реализуется рекуррентная процедура с использованием операции сдвига по времени. Время достижения цели равно времени достижения цели начального управления, увеличенного на сумму полупериодов собственных колебаний. Предлагаемый метод может быть реализован с помощью формирующего фильтра входного сигнала.

VIBRATIONLESS CONTROL OF MOVEMENT OF MULTI-MODE ELASTIC STRUCTURES

Prouzsin V.A.

*Institute of Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences,
Saint Petersburg*

Keywords: oscillation, vibration damping, control, vibrationless, input shaping filter.

Abstract. The article is devoted to rejection of unwanted dynamic reactions of flexible structures. The problem of vibrationless movement of an elastic object when natural oscillations are absent and the reaction of the system does not exceed the static reaction is considered. To analyze the oscillations of the system, the maximum response spectrum and the residual spectrum are used. The vibrationless movement property is defined as restrictions on these spectra specified by the control signal. The problem of vibrationless movement is solved by input shaping methods.

Введение

Упругие механизмы характеризуются динамическими реакциями на возмущающие и управляющие воздействия. Эти нежелательные реакции вызывают значительные проблемы с точностью позиционирования, пропускной способностью, усталостью и безопасностью. Эти проблемы возникают, например, при перемещении упругих манипуляторов, перемещении грузов с помощью кран-балки, разгоне, торможении железнодорожного состава, перемещении антенны или телескопа по заданной траектории и т.п.

Известны различные подходы к решению задачи гашения колебаний [1-6]. Обычно рассматривается задача снижения, уменьшения упругих колебаний управляемого объекта. Здесь эта задача рассматривается в максимально полной постановке: управлять перемещением упругого объекта таким образом, чтобы собственные упругие колебания объекта вообще не возникали. Речь идет о бесколебательном или квазистатическом, квазистационарном характере движения упругого объекта.

Такая постановка требует уточнения. При перемещении упругого объекта приложенной к нему внешней силой всегда возникают упругие деформации. Эти деформации разделяются на статические деформации, при которых реакция упругих связей компенсирует внешнюю нагрузку, и динамические колебания с собственными частотами. Если управляющая сила является внешней, то статические деформации исключить невозможно. Поэтому, говоря о бесколебательном движении, мы говорим о гашении собственных колебаний. При бесколебательном движении упругая система монотонно переходит от одного состояния статического равновесия к другому при смене участков постоянства управляющей силы. Собственные колебания отсутствуют, а реакция системы не превышает максимальной статической реакции.

Задача перемещения без собственных колебаний была рассмотрена в [7], где поставленная цель достигнута путем конструирования гладкого и медленно меняющегося управляющего воздействия. При этом происходит значительное увеличение времени достижения цели. Практически интересно искать бесколебательные решения, при которых время достижения цели увеличивается незначительно.

Пример бесколебательного управления двухмассовой упругой системой приведен в [8], где построен непрерывный закон управления трапецевидной формы. Длительность боковых сторон трапеции (линейно возрастающие и убывающие участки) равна периоду собственных колебаний системы. На этих участках деформация системы изменяется монотонно, а на постоянных участках управления эта деформация постоянна и равна статической реакции. Длительность управления увеличивается на величину, сравнимую с периодом собственных колебаний системы.

В [9] предложен метод гашения остаточных колебаний линейной системы с одной степенью свободы путем суммирования задающего сигнала с этим же сигналом, сдвинутым по времени на полупериод собственных колебаний. В результате длительность воздействия увеличивается на полупериод собственных колебаний. В [9] не рассматривается подавление колебаний на активном участке управления. Нет обобщения этого подхода на системы большей размерности.

Известен метод снижения упругих колебаний, называемый методом формирующего фильтра (шейпинг-метод). Обзор исследований по этому методу за последние полвека приведен в [10]. Метод заключается в формировании управляющего сигнала путем операции свертки задающего

воздействия с импульсной переходной характеристикой, представляющей сумму сдвинутых импульсов (дельта-функций Дирака). В результате выполнения операции свертки построенный управляющий сигнал представляет собой сумму некоторого количества экземпляров задающего воздействия, умноженных на весовые коэффициенты и сдвинутых во времени. Заметим, что исследование эффективности метода формирующего фильтра основано на анализе амплитудного спектра Фурье. Этот аппарат позволяет обеспечивать гашение только остаточных колебаний системы после снятия нагрузки и не гарантирует снижения амплитуд упругих колебаний на участке активного управления.

В работе [11] дано строгое определение бесколебательного управления. Поставлена и решена задача управления движением многомассового упругого объекта таким образом, чтобы исключить собственные колебания как в процессе перемещения, так и после достижения конечного состояния. Построенное управление может быть реализовано с помощью формирующего фильтра, основными элементами которого являются схемы задержки времени. Длительность управления равна длительности начального управления, увеличенной на суммы полупериодов собственных колебаний объекта.

В настоящей работе определение бесколебательного управления сведено к анализу двух показателей: остаточного спектра и коэффициента динамичности. Это позволяет упростить и обобщить подход, используемый в работе [11].

1. Постановка задачи

Рассматривается упругий объект, механической моделью которого является много-массовая система с линейными упругими связями (рис. 1). К массе m_0 , которая названа несущей массой, приложена скалярная управляющая сила $F(t)$, действующая вдоль заданного направления. Осуществляется поступательное движение системы вдоль этого направления. Управление $F(t)$ ограничено и финитно: $|F(t)| \leq f$, $F(t) = 0$ при $t < 0$ и $t > T$.

Остальные n масс m_k , $k = 1, 2, \dots, n$, называются присоединенными массами. Уравнения Ньютона в абсолютной системе координат образуют систему $n+1$ дифференциальных уравнений второго порядка:

$$M\ddot{y} + Cy = bF(t), \quad (1)$$

где $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)^T$ – вектор координат масс, M – диагональная матрица масс, C – симметричная матрица жесткостей, $b = (1, 0, \dots, 0)^T$ – вектор размерности $n+1$.

Система (1) специальной линейной заменой переменных $y = Rx$ приводится к системе $n+1$ независимых уравнений в главных координатах [11,12].

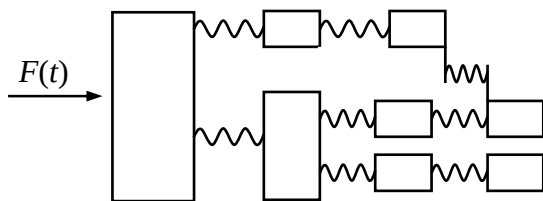


Рис. 1. Пример механической схемы многомассового объекта

$$M_0 \ddot{x}_0 = F(t); \quad (1)$$

$$\ddot{x}_k + \omega_k^2 x_k = g_k F(t), \quad k=1, \dots, n. \quad (2)$$

Здесь $M_0 = \sum_{i=0}^n m_i$ – суммарная масса системы, $x_0 = \frac{1}{M_0} \sum_{i=0}^n m_i y_i$ –

координата центра масс системы, $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)^T$ – вектор нормальных координат, Коэффициент g_k имеет смысл коэффициента вовлечения в колебания k -й собственной формы.

Упругий объект не связан с основанием и имеет форму колебаний с нулевой собственной частотой $\omega_0 = 0$. Эта форма соответствует перемещению объекта как твердого тела. Остальные частоты собственных колебаний положительны и попарно различны: $0 = \omega_0 < \omega_1 < \dots, \omega_n$. Ставится следующая задача управления.

Задача 1. Построить ограниченное управление $F(t)$, переводящее центр масс (2) из начального состояния в конечное состояние за время T . При этом система осцилляторов (3) переводится из состояния покоя в состояние покоя и движется бесколебательно.

Строгое определение бесколебательности дано ниже. Цель управления может состоять, например, в придании центру масс требуемого ускорения (задача бесколебательного старта), в разгоне центра масс до заданной скорости или его остановке, в перемещении центра масс на заданное расстояние и т.п.

2. Бесколебательные управления

Для определения свойства бесколебательности сначала рассматривается линейный осциллятор с собственной частотой ω :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F(t) \quad (4)$$

и начальными условиями $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Вводятся обозначения:

$r(t; \omega, F) = \omega^2 x(t; F)$ – реакция упругой связи на управляющее воздействие, $F_{\max} = \max_t |F(t)|$. В работе [11] бесколебательное перемещение линейного

осциллятора (4) определено как решение, которое состоит из следующих друг за другом состояний статического равновесия. При переходе от одного состояния статического равновесия к другому решение изменяется

монотонно. Бесколебательное перемещение многомассовой системы (1) определяется как бесколебательное перемещение каждого осциллятора в системе (3).

Дадим другое, более общее и удобное для проверки определение бесколебательности. Первое основное свойство бесколебательного движения заключается в том, что модуль реакции осциллятора не превосходит максимального значения модуля управления: $|r(t; F)| \leq F_{\max}$. Второе основное свойство состоит в отсутствии остаточных колебаний после окончания управления. Положим эти два свойства в определение бесколебательности.

Известно [4], что функция частоты $\omega A(\omega; F)$, где $A(\omega; F)$ – модуль преобразования Фурье от функции $F(t)$ равна амплитуде остаточных колебаний осциллятора (4): $\omega A(\omega; F) = \max_{t>T} |r(t; \omega, F)|$. Введем функцию относительного остаточного спектра $R(\omega; F)$ (далее – остаточный спектр):

$$R(\omega; F) = \frac{\max_{t>T} |r(t; \omega, F)|}{\max_t |F(t)|} = \frac{\omega A(\omega; F)}{\max_t |F(t)|} = \frac{\omega}{F_{\max}} \left| \int_0^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \right|.$$

Другая функция – коэффициент динамичности $K(\omega; F)$ показывает во сколько раз максимум реакции упругого осциллятора с частотой ω больше статической реакции, вызванной максимальным значением управления $F(t)$:

$$K(\omega; F) = \frac{\max_{t>0} |r(t; \omega, F)|}{\max_t |F(t)|} = \frac{\omega}{F_{\max}} \max_{t>0} \left| \int_0^t F(s) \sin \omega(t-s) ds \right|.$$

Вводятся следующие определения бесколебательности движения.

Определение 1. Управление $F(t)$ и решение уравнения (4) с собственной частотой $\omega = \omega_0$ называются бесколебательными, если выполнены условия: $K(\omega_0; F) \leq 1$ и $R(\omega_0; F) = 0$.

Определение 2. Управление $F(t)$ и решение системы (1) с собственными частотами $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ называются бесколебательными, если выполнены условия: $K(\omega_k; F) \leq 1$, $R(\omega_k; F) = 0$, $k = 1, \dots, n$.

Управления, бесколебательные в смысле работы [11], удовлетворяют определению 2.

Рассмотрим для примера управление $F(t)$ в виде прямоугольного импульса единичной амплитуды и длительности T . Построим для него коэффициент динамичности и остаточный спектр (рис. 2). Мы видим, что здесь коэффициент динамичности имеет значения, не превосходящие единицы, в области малых частот, а остаточный спектр обращается в нуль при $\omega = 2\pi k / T$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Таким образом, условия определения 2 для прямоугольного импульса выполнены только при $\omega = 0$.

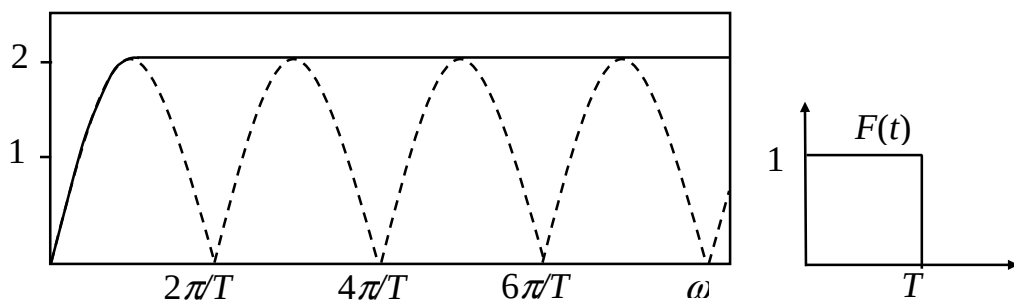


Рис. 2. Коэффициент динамичности (сплошная линия) и остаточный спектр (пунктир) прямоугольного импульса

3. Решение задачи бесколебательного управления

Общее решение задачи 1 получено в [11]. Пусть система (1) имеет n ненулевые собственные частоты ω_k , $k=1, \dots, n$. Решение состоит из двух этапов.

1. Для уравнения (2) строится оптимальное по быстродействию управление $F_0(t)$, решающее задачу перемещения центра масс из заданного начального в заданное конечное состояние. Пусть T – минимальное время достижения цели. Решение задач управления движением точечной массы хорошо известно [14].

2. Используя полупериоды собственных колебаний $\tau_k = \pi\omega_k^{-1}$ в качестве сдвигов по времени, строится рекуррентная последовательность функций:

$$F_k(t) = \frac{1}{2}(F_{k-1}(t) + F_{k-1}(t - \tau_k)), \quad k=1, \dots, n. \quad (3)$$

Утверждение. Управление $F_n(t)$, построенное по алгоритму (5) с начальным управлением $F_0(t)$ решает задачу за время $T_n = T + \sum_{i=1}^n \tau_i$ и удовлетворяет определению 2. Доказательство этого утверждения приведено в [11].

Управление $F_n(t)$ может быть реализована с помощью каскадного цифрового фильтра с n линиями задержки (рис. 3).

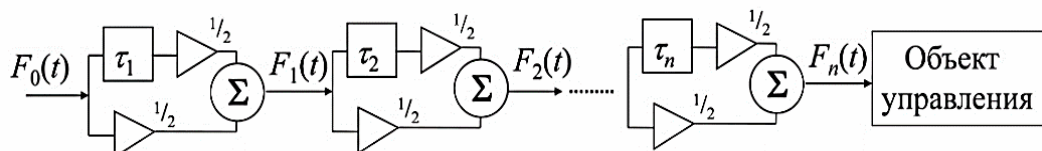


Рис. 3. Схема каскадного цифрового фильтра, реализующего бесколебательное управление

Доказано [11], что управление $F_n(t)$ также может быть представлено с помощью формирующего фильтра (рис. 4):

$$F_n(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^P F_0(t - t_i) .$$

Фильтр включает $P = 2^n - 1$ линий задержки. Значения задержек t_i есть всевозможные частичные суммы полупериодов $\tau_1, \dots, \tau_n$: $t_0 = 0$, $t_1 = \tau_1$, $t_2 = \tau_2, \dots$, $t_{n+1} = \tau_1 + \tau_2, \dots$, $t_p = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$.

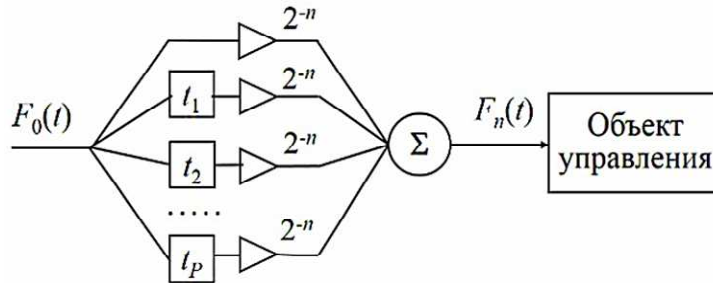


Рис. 4. Схема формирующего фильтра, реализующего бесколебательное управление

4. Пример двухмассовой системы

Рассматривается система из двух масс m_0, m_1 , связанных линейной упругой связью с коэффициентом жесткости c . Собственная частота системы

$$\omega_1 = \sqrt{c(1/m_0 + 1/m_1)} .$$

Решается задача перемещения двухмассовой упругой системы на расстояние D .

Начальное управление $F_0(t)$, $|F| \leq f$, осуществляет оптимальное быстроедействие при перемещении точечной массы $M_0 = m_0 + m_1$ на расстояние D [14]:

$$F_0(t) = f(H(t) - 2H(t - 0,5T) + H(t - T)),$$

где $H(t)$ – ступенчатая функция Хевисайда. Время достижения цели $T = 2\sqrt{M_0 D f^{-1}}$. Для решения задачи бесколебательного перемещения центра масс на расстояние D строиться управление

$$F_1(t) = 0.5(F_0(t) + F_0(t - \tau_1)),$$

где $\tau_1 = \pi\omega_1^{-1}$. На рис. 5 приведены графики начального управления $F_0(t)$ и бесколебательного управления $F_1(t)$ (сплошные линии), а также упругие реакции на них (пунктирные линии). На рис. 6 приведены графики остаточного спектра и коэффициента динамичности для построенных управлений.

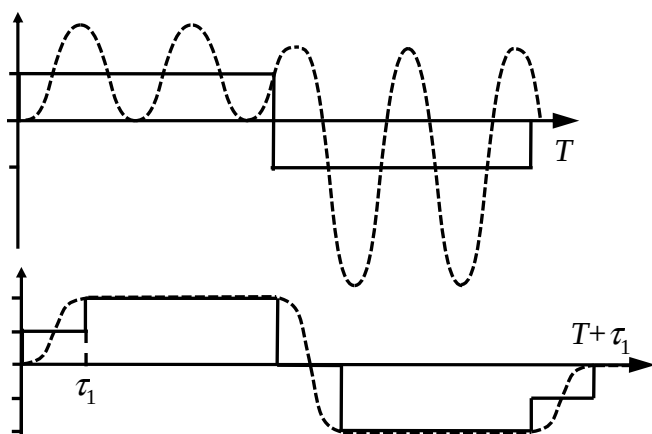


Рис. 5. Графики начального управления и бесколебательного управления (сплошные линии) и реакции двухмассовой системы на них (пунктирные линии)

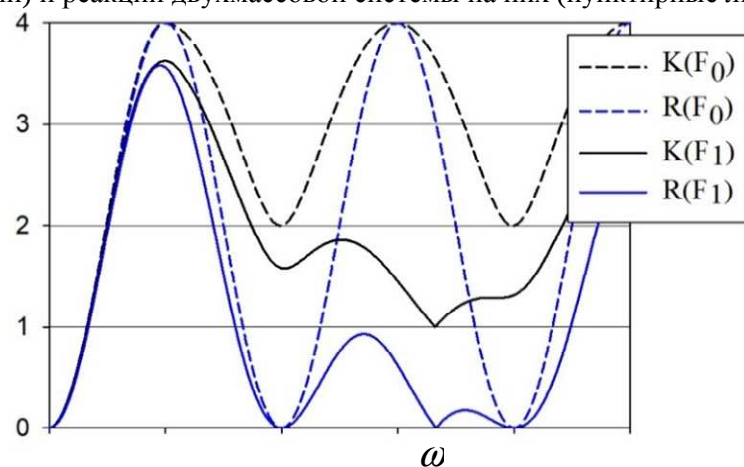


Рис. 6. Графики остаточного спектра и коэффициента динамичности начального (пунктирные линии) и бесколебательного управления (сплошные линии)

Заключение

Результаты статьи будут полезны при управлении движением упругих технических объектов, где собственные колебания объектов нежелательны. Задача гашения собственных колебаний упругого объекта решена максимально полно в том смысле, что динамические упругие реакции при движении вообще не возбуждаются.

Предложенный метод бесколебательного управления движением легко реализуется практически. Строится начальное “жесткое” управление перемещения центра масс. Строится рекуррентная последовательность функций с использованием всего двух операций: сдвига по времени и суммирования. Количество итераций равно количеству собственных частот системы.

Технически данный метод можно реализовать с помощью формирующего фильтра. Начальное управление подается на объект через фильтр, включающий в себя линии задержки времени, умножители и

сумматор. Процедура фильтрации увеличивает длительность начального управления на сумму полупериодов собственных колебаний объекта.

Важно отметить, что для реализации метода достаточно знать суммарную массу системы и значения собственных частот. Все остальные параметры упругой системы, как и уравнения ее колебаний, в построении управления не используются. Таким образом, метод может быть применен к любому объекту с известными собственными частотами. Метод можно также использовать для полного гашения заданного числа собственных форм колебаний систем с распределенными параметрами.

Список литературы

1. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384с.
2. Знаменская Л.Н. Управление упругими колебаниями. М.: Физматлит, 2004. 176с.
3. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568с.
4. Prourzin V.A. A constrained scalar control for the motion of a system of oscillators with damping residual oscillations // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2007. №46(4). P. 521-531.
5. Костин Г.В., Саурин В.В. Моделирование и оптимизация движений упругих систем методом интегродифференциальных соотношений // Доклады Академии Наук. 2006. №408(6). С. 750-753.
6. Зегжда С.А., Солтаханов Ш.Х. Применение обобщенного принципа Гаусса к решению задачи о гашении колебаний механических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. №2. С. 20-25.
7. Акуленко Л.Д. Квазистационарное финитное управление движением гибридных колебательных систем // Прикладная математика и механика. 1991. №55(2). С. 183-192.
8. Gannel L. V., Formal'skii A. M. Control for minimizing vibrations in systems with compliant elements // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2013. № 52(1). P. 117-128.
9. Smith O.J.M. Posicast Control of Damped Oscillatory Systems // Proc. IRE. 1957. №45(9). P. 1249-1255.
10. Singhose W. Command Shaping for Flexible Systems: A Review of the First 50 Years // Int. J. Precis. Eng. Man. 2009. №10 (4). С. 153-168.
11. Prourzin V.A. Control of Elastic Plant Movement without Excitation on Eigen-oscillation // Automation and Remote Control. 2017. №78(12). P. 2141-2153.
12. Weaver Jr.W., Timoshenko S.P., Young D.H. Vibration problems in engineering, John Wiley & Sons. New York, 1990.
13. Prourzin V.A. A problem of optimal shock isolation of elastic objects // Mechanics of solids. 2004. №39 (2). P. 22-29.
14. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408с.

References

1. Chernous'ko F.L., Akulenko L.D., Sokolov B.N. Control of oscillations. M.: Science, 1980. 384p.
2. Znamenskaya L.N. Control of elastic vibrations. M.: Fizmatlit, 2004. 176p.
3. Butkovskij A. G. Management methods of distributed parameter systems. M.: Science, 1975. 568p.
4. Prourzin V.A. A constrained scalar control for the motion of a system of oscillators with damping residual oscillations // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2007. №46(4). P. 521-531.

5. Kostin G.V., Saurin V.V. Modeling and optimization of elastic system motions by the method of integro-differential relations // Reports of the Academy of Sciences. 2006. № 408(6). P. 750753.
6. Zegzhda S.A., Soltakhanov S. K. Application of the generalized Gaussian principle to the problem of damping vibrations of mechanical systems // News RAS. Theory and control systems. 2010. №2. P. 20-25.
7. Akulenko L.D. Quasistationary finite-interval control of the motion of hybrid oscillatory systems // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1991. №55(2). P. 183-192.
8. Gannel L. V., Formal'skii A. M. Control for minimizing vibrations in systems with compliant elements // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2013. № 52(1). P. 117-128.
9. Smith O.J.M. Posicast Control of Damped Oscillatory Systems // Proc. IRE. 1957. №45(9). P. 1249-1255.
10. Singhose W. Command Shaping for Flexible Systems: A Review of the First 50 Years // Int. J. Precis. Eng. Man. 2009. №10 (4). C. 153-168.
11. Prourzin V.A. Control of Elastic Plant Movement without Excitation on Eigen-oscillation // Automation and Remote Control. 2017. №78(12). P. 2141-2153.
12. Weaver Jr.W., Timoshenko S.P., Young D.H. Vibration problems in engineering, John Wiley & Sons. New York, 1990.
13. Prourzin V.A. A problem of optimal shock isolation of elastic objects // Mechanics of solids. 2004. №39 (2). P. 22-29.
14. Boltyanski V.G. Mathematical methods of optimal control. M.: Science, 1969. 408p.

Сведения об авторах:

Проурзин Владимир Афанасьевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем машиноведения РАН, г.Санкт-Петербург, Россия, proursin@gmail.com

Information about authors:

Prourzin Vladimir Afanas'evich – candidate of physico-mathematical sciences, senior research officer, Institute of Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, Russia, proursin@gmail.com

Получена 21.11.2019