

МЕТОДОЛОГИЯ ОЦЕНКИ СТРУКТУРНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ КОНЦЕПЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТОВ

Елисеев А.В., Миронов А.С.

Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск

Ключевые слова: механические колебательные системы, структурные математические модели, передаточная функция, динамическое гашение колебаний, интегральные характеристики, динамический инвариант, частотная функция обнуления.

Аннотация. Развивается концепция динамических инвариантов в оценке структурных свойств семейств механических колебательных систем, являющимися расчетными схемами для технических объектов транспортного или технологического назначения, находящихся в условиях вибрационного нагружения. Рассматриваются механические колебательные системы цепного типа с двумя степенями свободы под воздействием связанных силовых возмущений. Коэффициент связности силовых возмущений рассматривается в качестве вариационного настроечного параметра системы. Поставлена задача оценки динамических особенностей семейств механических колебательных систем с учетом связности внешних возмущений. Используются методы структурного математического моделирования для оценки динамических состояний и форм динамических взаимодействий. Рассмотрены частные случаи механических колебательных системы, соответствующие динамическим инвариантам. Для соответствующих частных случаев механических колебательных систем построены интегральные характеристики совокупности динамических инвариантов. Разработан метод оценки структурных свойств на основе динамических инвариантов.

METHODOLOGY FOR EVALUATING THE DESIGN FEATURES OF MECHANICAL OSCILLATORY SYSTEMS BASED ON THE CONCEPT OF DYNAMIC INVARIANTS

Eliseev A.V., Mironov A.S.

Irkutsk State Transport University, Irkutsk

Keywords: mechanical oscillatory systems, structural mathematical models, transfer function, dynamic vibration damping, integral characteristics, dynamic invariant, frequency zeroing function.

Abstract. The concept of dynamic invariants is being developed in the evaluation of structural properties of families of mechanical oscillatory systems, which are design schemes for technical objects of transport or technological purpose under conditions of vibration loading. Mechanical oscillatory systems of a chain type with two degrees of freedom under the influence of connected force disturbances are considered. The coefficient of connectivity of force disturbances is considered as a variational tuning parameter of the system. The task of estimating the dynamic features of families of mechanical oscillatory systems, taking into account the connectivity of external disturbances, is set. Structural mathematical modeling methods are used to evaluate dynamic states and forms of dynamic interactions. Special cases of mechanical oscillatory systems corresponding to dynamic invariants are considered. Integral characteristics of a set of dynamic invariants are constructed for the corresponding special cases of mechanical oscillatory systems. A method for evaluating structural properties based on dynamic invariants has been developed.

Введение. В настоящее время особое значение приобретают вопросы обеспечения безопасности технических объектов, находящихся в условиях

вибрационного нагружения силовой природы. Разработка технологий управления вибрационными взаимодействиями элементов технологических систем предопределяет внимание к разработке методологии оценки, контроля и формирования динамических особенностей механических колебательных систем, включающих в свой состав настроечные параметры. Для моделирования технических объектов на всех стадиях производства и эксплуатации широкое распространение получили методы структурного математического моделирования, использующие в качестве расчетных схем механические колебательные системы. В рамках методов структурного математического моделирования механической колебательной системе сопоставляется схема эквивалентная в динамическом отношении системы автоматического управления [1-3].

Особенности динамических режимов движений элементов механических колебательных систем определяются характером как внутренних силовых взаимодействий, так и внешних сил, приложенных к массоинерционным элементам. Факторами, влияющими на разнообразие режимов динамических взаимодействий элементов систем, могут служить неудерживающие связи, упругие взаимодействия элементов системы, постоянные дополнительные силы, особенности формирования статических и динамических реакций и др. [4-11]. Условия проявления специфических динамических режимов представляют интерес в плане разработки способов и средств для оценки, контроля и формирования вибрационных полей движения рабочих органов вибрационных машин транспортного и технологического назначения [1-3, 12, 13].

В рамках структурного математического моделирования при отсутствии неудерживающих связей для оценки разнообразия динамических состояний некоторое развитие получила концепция динамических инвариантов, интерпретирующая семейства амплитудно-частотных характеристик в виде графов, сохраняющихся на определенных множествах механических колебательных систем [14-16]. В условиях вибрационного нагружения, динамические особенности взаимодействия элементов системы могут быть отображены характеристиками динамических инвариантов в виде количества частот обнуления амплитуд колебания координат объекта, частот резонанса и форм динамических взаимодействий, представленными положительными и отрицательными ветвями амплитудно-частотных характеристик передаточных функций системы.

Вместе с тем, в концепции динамических инвариантов недостаточно детализированы представления о разнообразии динамических особенностей в зависимости от структурной специфики механических колебательных систем.

Статья посвящена разработке подходов к отображению структурных особенностей механических колебательных систем цепного типа с двумя степенями свободы с помощью интегральных характеристик динамических инвариантов.

I. Основные положения. Постановка задачи. Рассматривается механическая колебательная система с двумя степенями свободы, образованная массоинерционными и упругими элементами (рис. 1).

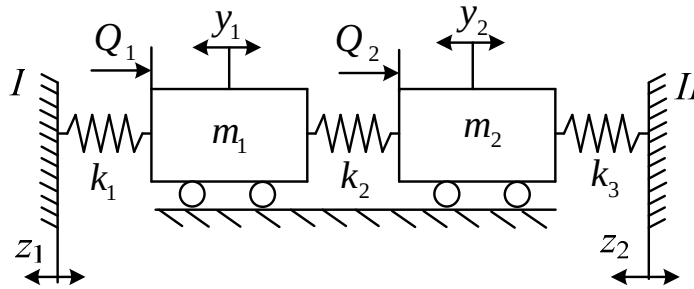


Рис. 1. Механическая колебательная система с двумя степенями свободы: m_1, m_2 - массоинерционные элементы, k_1, k_2, k_3 - упругие элементы, z_1, z_2 - кинематические возмущения, Q_1, Q_2 - внешние силовые возмущения, y_1, y_2 - координаты системы

В качестве внешних возмущений, приложенных к массоинерционным элементам m_1 и m_2 , выступают синфазные гармонические функции Q_1 и Q_2 . В качестве кинематических возмущений выступают синфазные кинематические возмущения z_1, z_2 . Предполагается, что система совершает малые установившиеся колебания y_1, y_2 относительно положения статического равновесия с начальными нулевыми условиями; силовые возмущения связаны между собой линейной функциональной зависимостью $Q_2 = \gamma Q_1$.

Задача заключается в разработке метода оценки с помощью характеристик динамических инвариантов структурных особенностей семейств цепных механических колебательных систем, находящихся под воздействием связанных силовых возмущений.

II. Математическая модель. На основе известных методов расчетной схеме механической колебательной системы может быть сопоставлена структурная схема эквивалентная в динамическом отношении системы автоматического управления (рис. 2) [1-3].

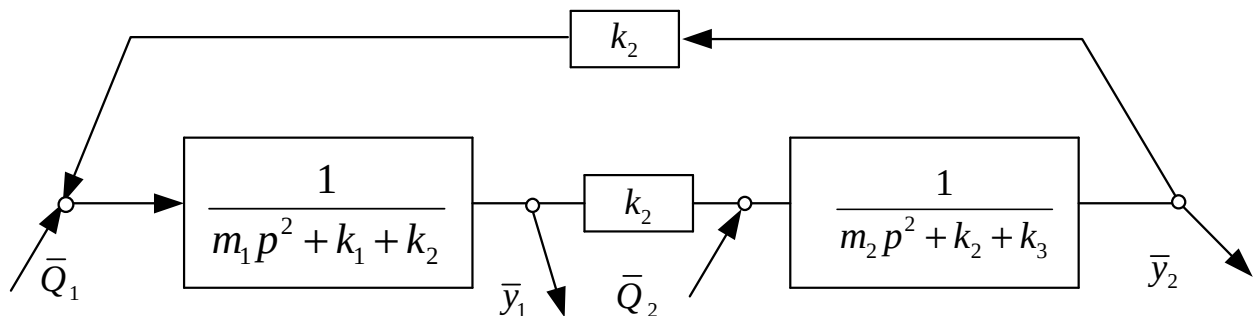


Рис. 2. Структурная схема механической колебательной системы с двумя степенями свободы при условии $z_1=0, z_2=0, p=j\omega$ – комплексная переменная, символ «-» над переменной обозначает изображение Лапласа [17]

На основе структурной схемы (рис. 2) может быть построена передаточная функция системы, отображающая ряд динамических особенностей:

$$\bar{Q}_1 \neq 0, \quad W_{11}(p) = \left. \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} \right|_{\substack{z_1=0 \\ z_2=0}} = \frac{m_2 p^2 + k_2 + k_3}{(m_1 p^2 + k_1 + k_2)(m_2 p^2 + k_2 + k_3) - k_2^2}, \quad (1)$$

При условии связности внешних силовых возмущений в виде

$$Q_2 = \gamma Q_1 \quad (2)$$

динамические особенности механической колебательной системы могут быть отображены, включающим в свой состав коэффициент связности γ , передаточным отношением:

$$\bar{Q}_1 \neq 0, \bar{Q}_2 = \gamma \bar{Q}_1, W_{11}(\gamma, p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} \bigg|_{\substack{z_1=0 \\ z_2=0}} = \frac{m_2 p^2 + k_2 + k_3 + \gamma k_2}{(m_1 p^2 + k_1 + k_2)(m_2 p^2 + k_2 + k_3) - k_2^2}. \quad (3)$$

Динамические особенности в виде критических состояний обнуления амплитуд колебаний объекта, режимов резонанса и форм динамических взаимодействий могут быть представлены амплитудно-частотной характеристикой передаточного отношения (1) при условии связности внешних возмущений (2):

$$W_{11}(\gamma, p) \big|_{p=j\omega} = \frac{-m_2 \omega^2 + k_2 + k_3 + \gamma k_2}{m_1 m_2 \omega^4 - (m_2(k_1 + k_2) + m_1(k_2 + k_3))\omega^2 + k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3}. \quad (4)$$

Выражение (4) может быть приведено к виду:

$$A_{11}(\omega) = W_{11}(\gamma, p) \big|_{p=j\omega} = \frac{-m_2(\omega^2 - (n_2^2 + \gamma \Delta_2^2))}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}, \quad (5)$$

$$\text{где } \omega_1^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2}\right)^2 + \Delta_1^2 \Delta_2^2}, \quad \omega_2^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2}\right)^2 + \Delta_1^2 \Delta_2^2}, \quad (6)$$

$$n_1^2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1}, \quad n_2^2 = \frac{k_2 + k_3}{m_2}, \quad \Delta_1^2 = \frac{k_2}{m_1}, \quad \Delta_2^2 = \frac{k_2}{m_2}.$$

В выражении (5) ω_1^2, ω_2^2 – собственные частоты системы, n_1^2, n_2^2 – парциальные частоты, Δ_1^2, Δ_2^2 – «собственные частоты» фрагментов системы.

Существенные особенности механической колебательной системы с учетом коэффициента связанности γ могут быть определены на основе так называемой частотной функции обнуления амплитуды колебания координаты y_1 объекта, совокупность динамических состояний которого оценивается:

$$\omega^2(\gamma) = n_2^2 + \Delta_2^2 \gamma. \quad (7)$$

Частотная функция обнуления (7) в зависимости от коэффициента связности γ определяет частоту ω внешнего возмущения Q_1 , на которой обнуляется амплитуда колебания координаты y_1 .

На основе частотной функции обнуления (7) и собственных частот (6) системы может быть построено семейство динамических инвариантов в виде ориентированных графов, отображающих совокупности динамических особенностей механической колебательной системы [14-16].

Особенности динамического инварианта могут быть охарактеризованы выражением $S_i^j F_k^l$, где i – количество состояний обнуления амплитуд колебаний, j – количество резонансов, k – количество отрицательных динамических форм взаимодействий, l – количество положительных форм взаимодействий. На рисунке 3 представлены амплитудно-частотные характеристики, динамические инварианты которых заданы выражениями вида $S_i^j F_k^l$.

При условии $0 < \omega_1^2, 0 < \Delta_2^2$ соответствующие интервалам и точечным значениям коэффициента связности динамические инварианты механической колебательной системы (рис. 1) представлены в таблице 1.

Вместе с тем, параметры системы могут не удовлетворять условиям $0 < \omega_1^2$, что создает предпосылки к возможному изменению совокупности динамических инвариантов.

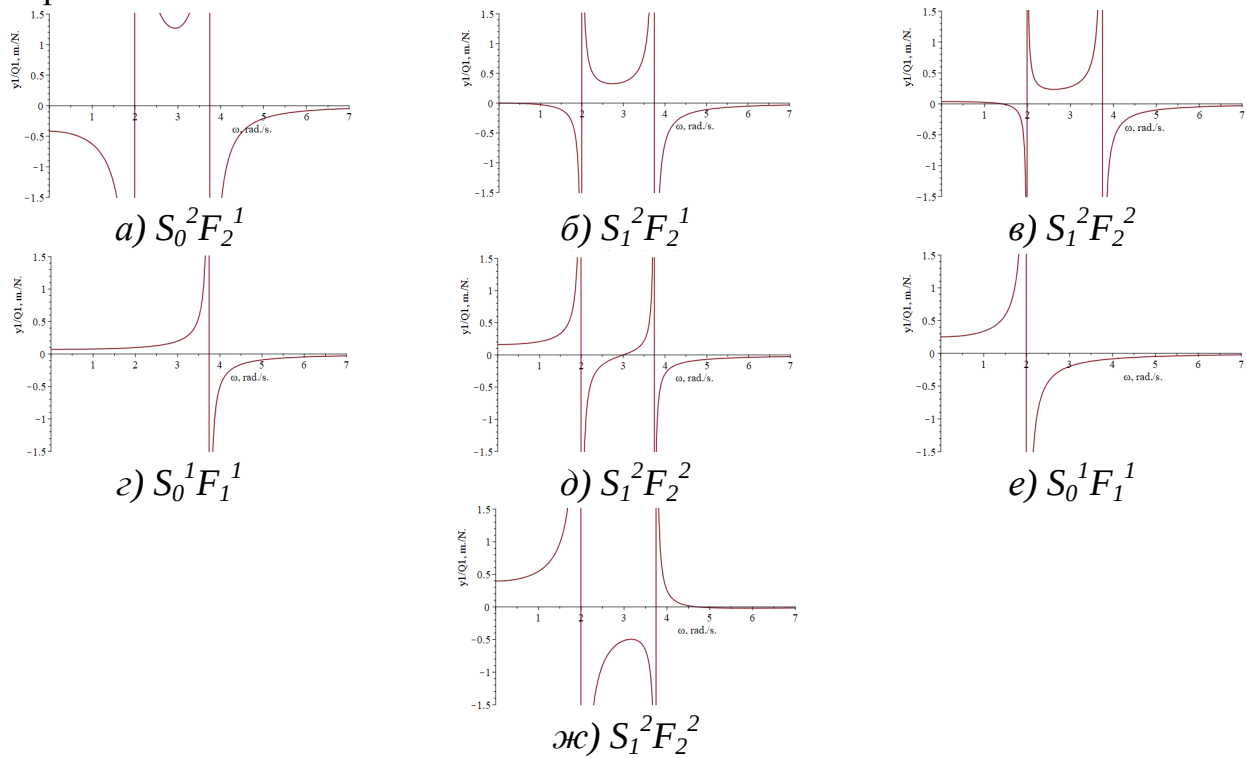


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики, отображающие заданные инварианты

Табл. 1. Динамические инварианты механической колебательной системы

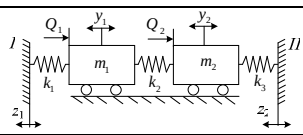
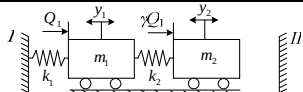
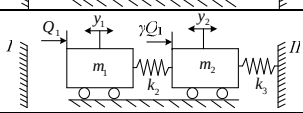
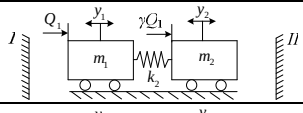
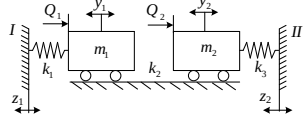
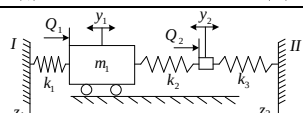
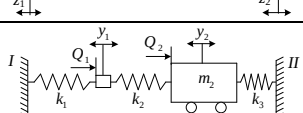
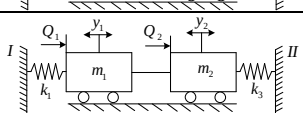
I	$\gamma < \gamma_0$	$\gamma = \gamma_0$	$\gamma_0 < \gamma < \gamma_1$	$\gamma = \gamma_1$	$\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$	$\gamma = \gamma_2$	$\gamma_2 < \gamma$
II	S_0^2	S_1^2	S_1^2	S_0^1	S_1^2	S_0^1	S_1^2
III							
IV	F_2^1	F_1^2	F_2^2	F_1^1	F_2^2	F_1^1	F_2^2
V							
VI	$S_0^2 F_2^1$	$S_1^2 F_1^2$	$S_1^2 F_2^2$	$S_0^1 F_1^1$	$S_1^2 F_2^2$	$S_0^1 F_1^1$	$S_1^2 F_2^2$
VI	J_7	J_6	J_7	J_3	J_5	J_3	J_7

III. Оценка динамических особенностей механических колебательных систем со структурной спецификой. На основе исходной механической колебательной системы могут быть рассмотрены системы, отражающие различные структурные особенности в виде обнуления жесткостей, масс или принятия ими предельно больших значений. В таблице 2 представлены характеристики механических колебательных систем с учетом структурных особенностей.

В таблице 2 на пересечении строк, соответствующих вариантам механических систем, и столбцам, отображающих характеристики динамических инвариантов, стоит символ «V», если динамический инвариант(столбца)

отражает динамические особенности рассматриваемой механической колебательной системы (строки). В частности, показано, что диада (Таблица 2, строка III) обладает динамическими инвариантами с характеристиками J_2 - J_7 . В свою очередь, «присоединение» диады к опорной поверхности изменяет её динамическое многообразие на совокупность J_3 , J_5 - J_7 .

Табл. 2. Характеристики динамических инвариантов с учетом структурных особенностей

$\frac{\bar{y}_1}{Q_1}(j\omega)$	Параметры системы	Расчетная схема	Характеристики динамических инвариантов							
			$S_0^0 F_0^1$	$S_0^1 F_1^0$	$S_0^1 F_1^1$	$S_0^2 F_2^1$	$S_1^2 F_2^1$	$S_1^2 F_2^2$	$S_\infty^0 F_0^0$	
			J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_∞
I	$m_i > 0, k_j > 0$				V		V	V	V	
II	$k_3 = 0$				V		V	V	V	
III	$k_1 = 0$				V		V	V	V	
IV	$k_1 = 0, k_3 = 0$			V	V	V	V	V		
V	$k_2 = 0$				V					V
VI	$m_1 \rightarrow 0$		V		V	V	V			
VII	$m_2 \rightarrow 0$				V					V
VIII	$k_2 \rightarrow \infty$				V					V

Заключение. В рамках методологии структурного математического моделирования рассмотрена задача оценки возможных совокупностей динамических особенностей для цепной механической колебательной системы, находящейся под воздействием связанных силовых возмущений. Для семейств механических колебательных систем построены частные характеристики динамических инвариантов, отображающие количественные особенности амплитудно-частотных характеристик передаточных функций системы. Рассмотрены частные случаи механических колебательных систем и соответствующие им характеристик динамических инвариантов. Для соответствующих частных случаев механических колебательных систем построены интегральные характеристики совокупности динамических инвариантов. Таким образом, разработана методология оценки структурных преобразований механических колебательных систем.

Список литературы

1. Елисеев С.В., Елисеев А.В., Большаков Р.С., Хоменко А.П. Методология системного анализа в задачах оценки, формирования и управления динамическим состоянием технологических и транспортных машин. Новосибирск: Наука, 2021. 679 с.
2. Eliseev S.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects /S.V. Eliseev, A.V. Eliseev // Series: Studies in Systems, Decision and Control, Springer International Publishing, 2020, Vol. 252, 521 p.
3. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Артюнин А.И., Большаков Р.С., Каимов Е.В., Елисеев А.В. Упругие элементы в механических системах. Структурные интерпретации. – Иркутск: Ирк. гос. ун-т путей сообщ., 2013. – 460 с. – Деп. в ВИНТИ 02.08.13 № 230 – В 2013.
4. Елисеев С.В., Елисеев А.В. Определение контактных реакций в составных твердых телах при динамических нагрузках с учетом неудерживающих связей // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2014. №1(№41). С. 45-54.
5. Елисеев С.В., Елисеев А.В. Особенности возникновения зазора в механической системе с неудерживающей связью при импульсном воздействии // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2013. №2(№38). С. 36-45.
6. Елисеев А.В. Особенности взаимодействия материальной частицы с вибрирующей поверхностью в зависимости от дополнительной силы с неудерживающей связью // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2013. №3. С. 9-15.
7. Елисеев С.В., Ситов И.С., Елисеев А.В. Движение материальной частицы с подбрасыванием на примере модельной задачи с неудерживающими связями // Машиностроение и безопасность жизнедеятельности. Научно-технический журнал. 2012. №3(13). С. 53-59.
8. Елисеев А.В. Особенности реализации режима кратного подбрасывания в модельной задаче с неудерживающей связью при наличии вязкого трения // Наука в центральной России. По итогам работы Международной научной конференции «Новаии XXI Века: Технологии, экономика, Творчество». Тамбов: ГНУ ВНИИТиН Россельхозакадемии, 2013. №2. С. 42-47.
9. Елисеев С.В., Ситов И.С., Елисеев А.В. Характеристики взаимодействия материальной частицы и поверхности колебания в зависимости от постоянной силы с учетом неудерживающей связи // Техника и технологии: новые перспективы развития: Материалы VII Международной научно-практической конференции. – М.: Изд-во «Спутник+», 2012. – С. 20-22.
10. Елисеев А.В. Динамическое взаимодействие в контактах составных твердых тел. Технология оценки свойств // Труды XIX Байкальской Всероссийской конференции «Информационные и математические технологии в науке и управлении». Часть I. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2014. – С. 81-89.
11. Елисеев С.В., Елисеев А.В. Обобщенные подходы в задачах определения контактных реакций в твердых телах при статических нагрузках с учетом неудерживающих связей // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2013. №4(№40). С. 51-60.
12. Елисеев А.В., Вьюнг К.Ч. Некоторые возможности управления одномерным вибрационным полем технологической машины // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2013. №1(49). С. 33-41.
13. Патент №136112 РФ. Устройство для гашения колебаний / Елисеев С.В., Артюнин А.И., Хоменко А.П., Каимов Е.В., Елисеев А.В. – №2013135078/11, заявл. 25.07.2013; опубл. 27.12.2013, Бюл. №36.
14. Елисеев А.В., Миронов А.С. Новые подходы к оценке режимов динамического гашения колебаний вибрационных машин транспортного и технологического назначения: графы динамических состояний и форм взаимодействия элементов // Мехатроника, автоматика и робототехника. 2022. №9. С. 23-29. <https://doi.org/10.26160/2474-5901-2022-28-22-25>.
15. Eliseev A.V., Mironov A.S. Methodological approaches to the assessment of the totality of dynamic states and forms of interactions of elements of vibrating machines for transport and

- technological purposes // Journal of Advanced Research in Technical Science. 2022. № 28. P. 22-25. <https://doi.org/10.26160/2474-5901-2022-28-22-25>.
16. Елисеев А.В. Проблема гашения колебаний в механических системах: системный анализ, моделирование, управление / А.В. Елисеев, А.П. Хоменко // Мехатроника, автоматизация, управление. 2022. Т. 23. № 5. С. 236-245.
17. Лурье А.И. Операционное исчисление и применение в технических приложениях. – М.: Наука, 1959. – 368 с.

Сведения об авторах:

Елисеев Андрей Владимирович – к.т.н., доцент кафедры математики;

Миронов Артем Сергеевич – соискатель, НОЦ современных технологий, системного анализа и моделирования.