

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРВОЙ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ КРИВОЛИНЕЙНЫХ БАЛОК

Рабецкая О.И.¹, Кудрявцев И.В.², Колотов А.В.², Митяев А.Е.²

¹*Сибирский государственный университет науки и технологий*

имени академика М.Ф. Решетнева, Красноярск;

²*Сибирский федеральный университет, Красноярск*

Ключевые слова: криволинейная балка, изгибные колебания, первая собственная частота, аналитическое выражение, упрощенная формула, погрешность.

Аннотация. В работе предлагаются аналитические выражения для приближенного определения первых двух наименьших собственных частот изгибных колебаний криволинейной балки, из плоскости и в плоскости ее дуги. Рассмотрены случаи шарнирного закрепления и жесткой заделки. С целью упрощения рассматривались плоские дуги окружности, имеющие осесимметричное поперечное сечение. Для этого проведен анализ существующих аналитических выражений для данной задачи, на основе которых и получены упрощенные аналитические формулы. Проведено уточнение и верификация полученного аналитического выражения путем выполнения сравнительных расчетов методом конечных элементов для криволинейной балки с различными геометрическими размерами. Показано, что полученное решение можно использовать для определения наименьшей частоты колебаний криволинейных балок, работающих в составе плоской балочной конструкции в качестве первого приближения.

APPROXIMATE FORMULAS FOR THE FIRST EIGENFREQUENCY OF CURVED BEAMS AT BENDING VIBRATIONS

Rabetskaya O.I.¹, Kudryavtsev I.V.², Kolotov A.V.², Mityaev A.E.²

¹*Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk;*

²*Siberian Federal University, Krasnoyarsk*

Keywords: curved beam, bending vibrations, first eigenfrequency, analytical expression.

Abstract. The paper proposes analytical equations for approximate determination of the first two lowest natural frequencies of bending vibrations of a curved beam, from the plane and in the plane of its arc. The cases of hinged and rigid supports were considered. In order to simplify, flat arcs of a circle having an axisymmetrical cross-section were considered. For this purpose, existing analytical equations for this problem were analyzed, on the basis of which simplified analytical formulas were obtained. The obtained analytical expression is refined and verified by making comparative calculations by the finite element method for a curved beam with different geometrical dimensions. It is shown that the obtained solution can be used as a first approximation to determine the lowest frequency of curved beams vibrations operating as part of a plane beam structure.

1. Введение

В машиностроении широко используются плоские балочные конструкции, имеющие в своем составе криволинейные элементы: трубопроводы, паропроводы, топливопроводы, арматура и так далее. Данные конструкции входят в состав конструкций различного назначения и испытывают действие вынужденных колебаний, которые могут совпадать с собственными частотами криволинейных элементов, приводя к нежелательным резонансам. Наиболее опасным является резонанс криволинейных элементов на первой собственной частоте колебаний, задаче определения которых и посвящена данная работа.

Свободные колебания прямолинейных балок при различных условиях закреплений хорошо известны в теории колебаний [1-4]. Однако найти готовое решение для задач колебаний криволинейных балок в научной литературе значительно сложнее даже для простых случаев геометрии и закреплений. Актуальность и сложность проблемы расчета криволинейных балок можно оценить, например, по обзорным статьям и книгам на данную

тему [5-11], которые опираются на сотни известных опубликованных работ. В данных работах приводится много ссылок на известную отечественную [12-17] и зарубежную [18-23] литературу, но воспользоваться их результатами непросто. Большинство авторов этих публикаций предлагают численные решения, которые показывают только общее динамическое поведение криволинейных балок и их сложно транслировать на другие расчетные случаи. В другой части публикаций приведены аналитические выражения в виде громоздких систем уравнений, для решения которых необходимо составлять специальную программу, поскольку ручной счет будет крайне неэффективен. Наконец, в оставшейся малой части предлагаются решения в виде графиков и относительно простых аналитических уравнений, но только для отдельных случаев сочетания геометрических размеров и способов закреплений, которых не всегда бывает достаточно.

Также, в рассмотренных публикациях разрешающие зависимости выводятся только для отдельно взятого криволинейного элемента конструкции, без учета взаимосвязанных с ним элементов. На практике же, изогнутые элементы практически всегда являются составной частью протяженной стержневой конструкции.

В данной работе на основе известных аналитических зависимостей и результатов численных экспериментов получено аналитическое выражение для приближенного определения значений собственных частот колебаний криволинейной балки, работающей в составе плоской балочной конструкции. С целью получения простого по форме выражения для определения частоты колебаний, были использованы допущения, упрощающих решение данной задачи. Результатом этих упрощений является, с одной стороны, более высокая погрешность расчетов, с другой стороны это позволяет получить простые определяющие выражения.

2. Методы

Рассмотрим криволинейные балки, геометрия которых представляет собой дугу окружности с углом охвата от 0° до 180° , что составляет большинство встречающихся на практике изогнутых участков протяженных балочных конструкций (рис. 1).

Важным моментом является определение граничных условий закрепления криволинейной балки, поэтому будем рассматривать условия ее работы в составе плоской балочной многоопорной конструкции (рис. 1). В большинстве случаев криволинейный участок является промежуточным и его границы имеют шарнирное закрепление, которое предотвращает только смещения в поперечных направлениях балки. В пределах криволинейного участка дополнительных опор обычно нет, поскольку она обычно служит в некотором

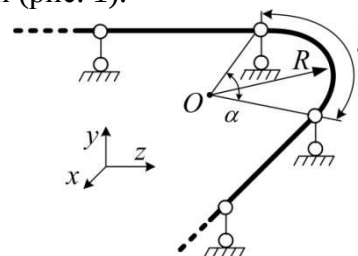


Рис. 1. Геометрия криволинейного участка

роде плавающей концевой опорой для присоединенных к нему прямолинейных участков, позволяя им изменять свою геометрию при изменении температуры и других воздействиях. В данной работе рассмотрены как шарнирные опоры участка, так и жесткое закрепление.

В качестве геометрии поперечного сечения принимаем осесимметричную форму, главные оси которой лежат в плоскости дуги балки. Эти условия выполняются для большинства балочных конструкций и позволяют существенно упростить решение за счет независимости мод колебаний. Соотношение размеров криволинейного участка должно соответствовать теории балок [24], то есть отношение их длины к максимальному поперечному размеру должно составлять:

$$\frac{l}{D_{\max}} \geq 10, \quad (1)$$

где l – длина дуги; $D_{\max}$ – максимальный поперечный размер сечения.

Дополнительным условием для арок является отношение максимального поперечного размера криволинейной балки к радиусу ее изгиба:

$$\frac{R}{D_{\max}} \geq 10, \quad (2)$$

где R – радиус дуги.

В условиях (1), (2) граничное значение 10 не строго и во многих случаях можно получить корректные результаты для нижней границы около 7. Материал балок линейный, изотропный и не подвержен влиянию сдвиговых деформаций. В работе считаем допустимой погрешность результатов, сравнимой с погрешностями теории балок, то есть около 5%. Это позволит получить простые аналитические зависимости, которые удобно использовать в качестве первого приближения.

Наименьшая жесткость конструкции криволинейного участка обычно связана с изгибом, в отличие, например, от ее кручения или растяжения-сжатия. При вышеуказанных условиях в подавляющем числе случаев первая собственная частота криволинейного участка будет совершать изгибные колебания из плоскости дуги (рис. 2), а ее вторая собственная частота соответствует изгибным колебаниям уже в плоскости этой дуги. Такое распределение мод колебаний справедливо для большинства случаев сочетаний размеров криволинейного участка и углов его изгиба, поскольку соответствует направлениям наименьшей жесткости. Особенностью динамического поведения криволинейного участка в составе конструкции является то, что при шарнирном закреплении ее колебания будут связаны с колебаниями смежных участков, что необходимо учитывать при выводе разрешающих зависимостей.

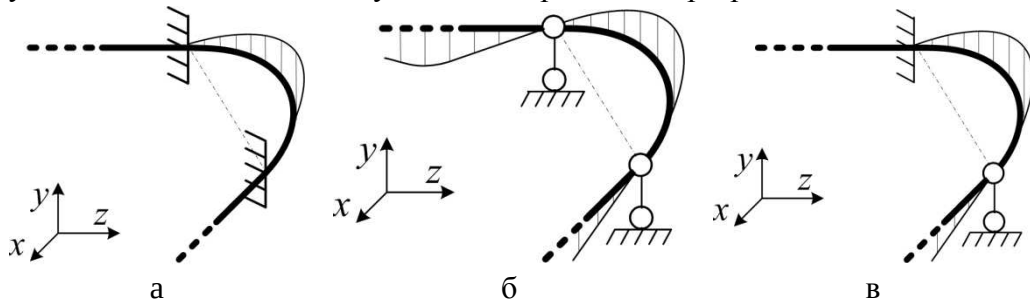


Рис. 2. Свободные колебания криволинейного участка из плоскости дуги

Решение для собственных частот колебаний прямых балок имеет простой аналитический вид:

$$f_1 = \frac{\lambda^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EJ_x}{m}}, \quad (3)$$

где λ – коэффициент, учитывающий условия закрепления стержня;

E – модуль Юнга; J_x – момент инерции сечения балки; m – удельная масса.

Проведенные нами исследования показывают, что частоты собственных колебаний криволинейных участков с малым углом изгиба от 0° до 50° , для которых выполняются условия (1) и (2), с точностью $\pm 5\%$ можно определять по формулам для прямых балок [25], в которых следует принять:

$$l = \alpha \cdot R, \quad (4)$$

где α – угол дуги арки.

Форму выражения (3) удобно использовать для анализа вклада различных составляющих криволинейного участка в его первую собственную частоту колебаний: жесткость, масса, размеры и т.д. В случаях же колебаний криволинейных участков с большими углами изгиба в известной литературе предлагаются гораздо более сложные зависимости, которые имеют ряд недостатков: они учитывают малый диапазон углов изгиба, имеют графический, табличный вид или же громоздкую аналитическую запись [25]. В результате становится затруднительным как анализ влияния отдельных компонентов формулы (3) на общее решение, так даже и простое ее использование при ручном счете.

В данной работе получены простые аналитические зависимости для определения первых частот колебаний криволинейных балок за счет приведенных выше допущений. В результате

рассчитываемые значения частот колебаний имеют более высокую погрешность, но позволяют в первом приближении оценивать динамические параметры криволинейных балок.

2.1. Колебания криволинейного участка из своей плоскости

Изгибные колебания из плоскости дуги определяют первую частоту собственных колебаний арки (рис. 2), уравнение колебаний которой имеет вид [1-4]:

$$EJ_x \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (5)$$

В случае жесткой заделки граничные условия криволинейного участка имеют вид:

$$\alpha = \pm \frac{\alpha}{2}, y = x = \frac{dy}{dz} = 0. \quad (6)$$

В случае шарнирных опор граничные условия принимают вид:

$$\alpha = \pm \frac{\alpha}{2}, y = x = \frac{d^2 y}{dz^2} = 0. \quad (7)$$

Первым рассмотрим случай жесткого закрепления (рис. 2,а), как более простой вариант работы криволинейного участка, поскольку в этом случае нет взаимного влияния со смежными участками как при шарнирном закреплении (рис. 2,б). Согласно [25] первая собственная частота колебаний такого криволинейного участка определяется по формуле:

$$f_1 = \frac{\pi^2}{2\pi(\alpha R)^2} \cdot \sqrt{\frac{3.586\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + 1.246 \frac{GC}{EJ_x} \beta}{\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + 1.246 \frac{GC}{EJ_x} \beta}} \cdot \sqrt{\frac{EJ_x}{m}}. \quad (8)$$

где C – крутильная жесткость, G – модуль сдвига, $\beta = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 - 2.49 \cdot \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + 5.139$.

Производя упрощения выражения (8) и сохраняя классическую форму записи (3), можно принять вариант жесткой заделки прямого участка при $\lambda=4,73$. Однако постоянное число в случае криволинейного участка не годится, поскольку действительное значение частоты нелинейно изменяется по диапазону геометрических параметров дуги. Удовлетворительную точность можно получить, если вместо константы принять линейные зависимости. В рассматриваемом случае после упрощения выражения (8) получим формулу для определения первой собственной частоты колебаний криволинейного участка при жестком закреплении (рис. 2,а) в виде:

$$f_1 = \frac{3.6 - 0.2 \cdot \alpha}{\alpha^2 \cdot R^2} \cdot \sqrt{\frac{EJ_x}{m}}. \quad (9)$$

Коэффициенты в числителе подобраны из условия минимального отклонения результатов расчетов между выражениями (8) и (9) для различного сочетания геометрических параметров криволинейного участка в соответствии с ограничениями (1) и (2). В результате отклонение результатов расчета по этим формулам составило не более $\pm 1\%$ (рис. 3).

В случае условий шарнирного закрепления криволинейного участка необходимо учитывать его взаимодействие со смежными участками. В этом случае возможно, что жесткость смежных участков меньше или больше, чем у рассматриваемого криволинейного участка. Примем условие равной жесткости всех участков плоской протяженной стержневой конструкции, что является рациональным решением и распространенным случаем на практике. Известные выражения для определения частоты в этом случае также имеют громоздкий вид [25], поэтому выполним их упрощение и получим формулу для определения первой собственной частоты колебаний криволинейного участка при шарнирном закреплении (рис. 2,б) в виде:

$$f_1 = \frac{1.33 + 0.27 \cdot \alpha}{\alpha^2 \cdot R^2} \cdot \sqrt{\frac{EJ_x}{m}}. \quad (10)$$

В этом случае погрешность определения частоты выше (почти до 6%) из-за более сильной нелинейной ее зависимости от параметров криволинейного участка (рис. 4).

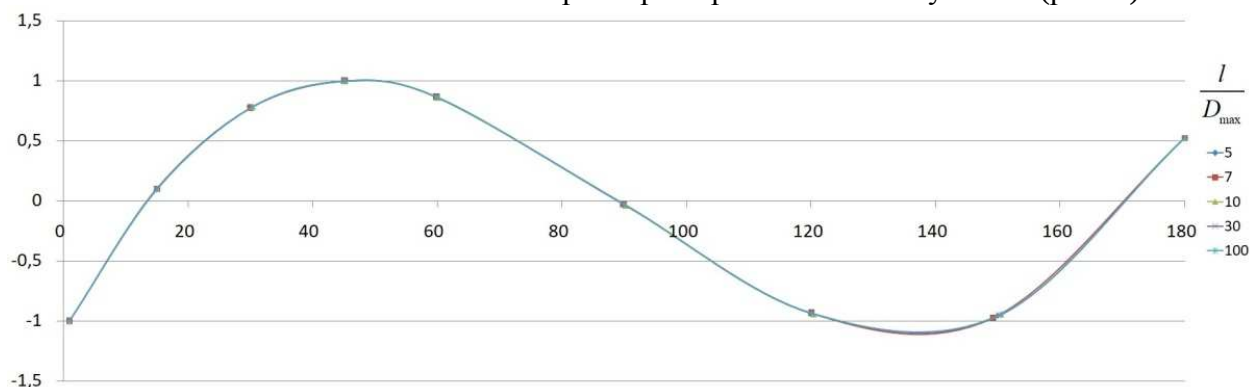


Рис. 3. Погрешность определения частоты при жесткой заделке и колебаниях из плоскости

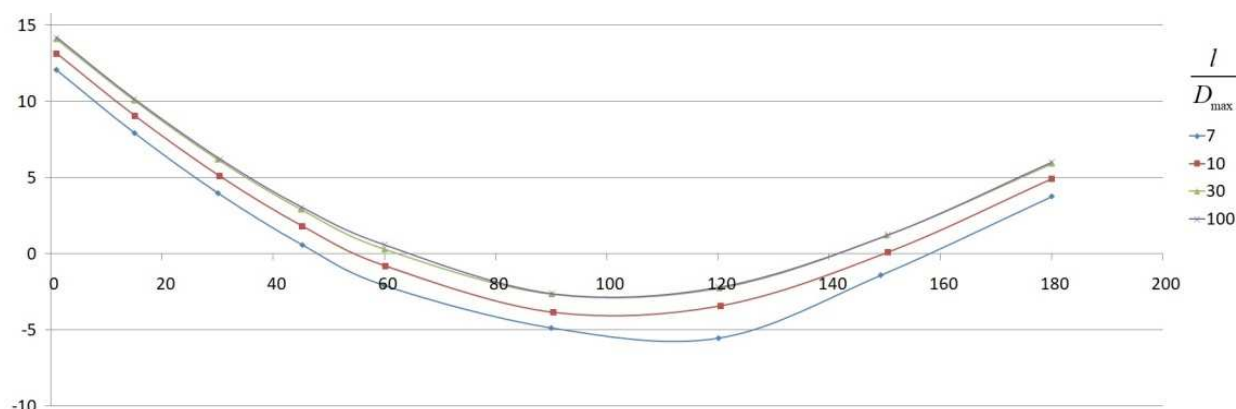


Рис. 4. Зависимость погрешности определения частоты при шарнирном закреплении и колебаниях из плоскости

В случае комбинации шарнирной опоры и жесткой заделки формула для определения первой собственной частоты колебаний криволинейного участка имеет вид:

$$f_1 = \frac{2.38 + 0.05 \cdot \alpha}{\alpha^2 \cdot R^2} \cdot \sqrt{\frac{EJ_x}{m}}. \quad (11)$$

В целом, полученные упрощенные формулы (9-11) позволяют определять первую собственную частоту изгибных колебаний криволинейных участков из своей плоскости с погрешностью не более $\pm 6\%$.

2.2. Колебания криволинейного участка в своей плоскости

Изгибные колебания криволинейной балки в своей плоскости затрагивают ее растяжение или сжатие, жесткость которых значительно больше, чем при изгибе (рис. 5). Поэтому частота колебаний балки в плоскости значительно выше, чем из плоскости.

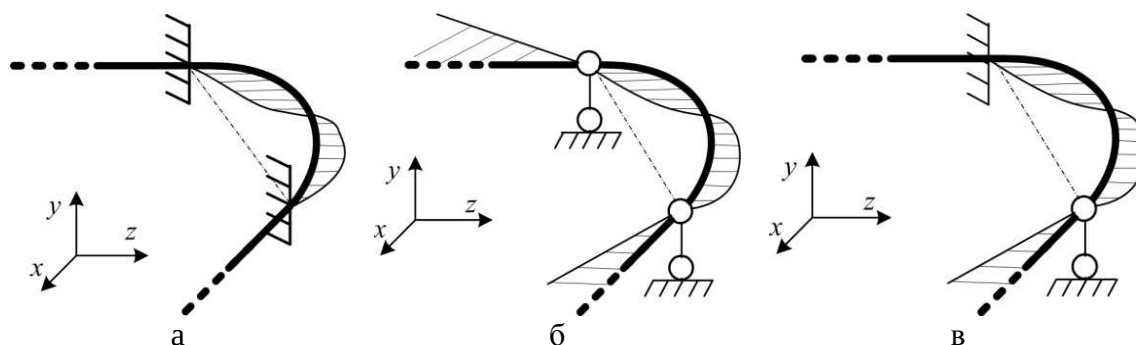


Рис. 5. Свободные колебания криволинейного участка в плоскости дуги

Уравнение свободных колебаний балки для этого случая имеет вид [1-4]:

$$EJ_y \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0. \quad (12)$$

где J_y – момент инерции сечения балки относительно оси.

В случае жесткой заделки граничные условия криволинейного участка имеют вид:

$$\alpha = \pm \frac{\alpha}{2}, y = z = \frac{dy}{dx} = 0. \quad (13)$$

В случае шарнирных опор в уравнении (5) граничные условия имеют вид:

$$\alpha = \pm \frac{\alpha}{2}, y = z = \frac{d^2 y}{dx^2} = 0. \quad (14)$$

Используя такой же подход, как и ранее, получим выражение для второй собственной частоты изгибных колебаний криволинейной балки в своей плоскости при жестком закреплении в виде:

$$f_2 = \frac{10 - \alpha}{\alpha^2 \cdot R^2} \cdot \sqrt{\frac{EJ_y}{m}}. \quad (15)$$

Для случая шарнирного соединения получаем выражение:

$$f_2 = \frac{6.6 - 0.92 \cdot \alpha}{\alpha^2 \cdot R^2} \cdot \sqrt{\frac{EJ_y}{m}}. \quad (16)$$

В случае комбинации шарнирной опоры и жесткой заделки формула для определения второй собственной частоты колебаний криволинейного участка имеет вид:

$$f_1 = \frac{8.15 - 0.96 \cdot \alpha}{\alpha^2 \cdot R^2} \cdot \sqrt{\frac{EJ_x}{m}}. \quad (17)$$

Погрешность расчетов по выражениям (15)-(17) также не превышает $\pm 6\%$ для рассматриваемого диапазона размеров криволинейного участка и углов его изгиба.

3. Обсуждение

В данной работе были рассмотрены колебания криволинейных балок в двух плоскостях, которые, как было сказано выше, составляют первые две собственные частоты их колебаний. Однако в зависимости от сочетаний геометрических размеров балок между этими видами колебаний могут существовать и промежуточные, изгибно-крутильные, которые здесь не рассматривались.

Полученные упрощенные выражения для определения частот получены на основе существующих более сложных зависимостей, которые взяты из известной научной литературы и имеют в основе свои допущения и ограничения. Поэтому предложенные упрощенные выражения были проверены путем расчетов криволинейных участков для углов от 0° до 180° с шагом 15° и с такими геометрическими параметрами R , α и D , которые обеспечивали соотношения $R/D = 7, 10, 30, 50, 100$ при $L/D > 7$.

Дополнительно полученные результаты сравнивались с численными результатами, полученными методом конечных элементов в программе Ansys с балочными конечными элементами типа Beam189. Численные методы также имеют свои ограничения [26-28], которые влияют на получаемые значения. На рисунке 6 показан типичный пример соотношения полученных результатов расчета по этим трем способам.

Как видно из рисунка 6 предложенная упрощенная аналитическая формула хорошо согласуется с двумя остальными способами расчета. При этом выбрать среди рассмотренных способов наиболее точный метод расчета весьма затруднительно, поэтому можно утверждать только об удовлетворительной сходимости предложенных упрощенных формул при указанных выше ограничениях.

Нормируем полученные выражения (9)-(11) и (15)-(17) относительно первой собственной частоты колебаний шарнирно опертой балки (3) при $\lambda=\pi$ и результаты представим в графическом виде (рис. 7).

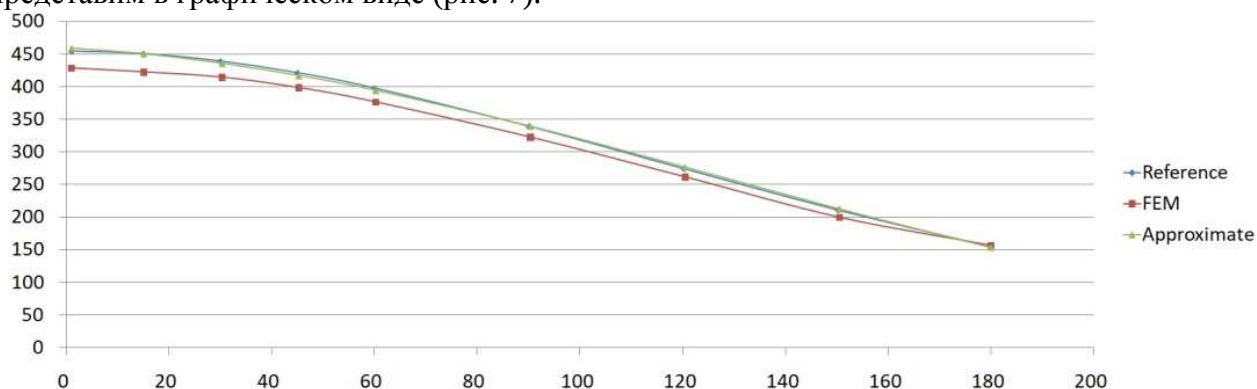


Рис. 6. Сравнение значений частот, найденных разными способами

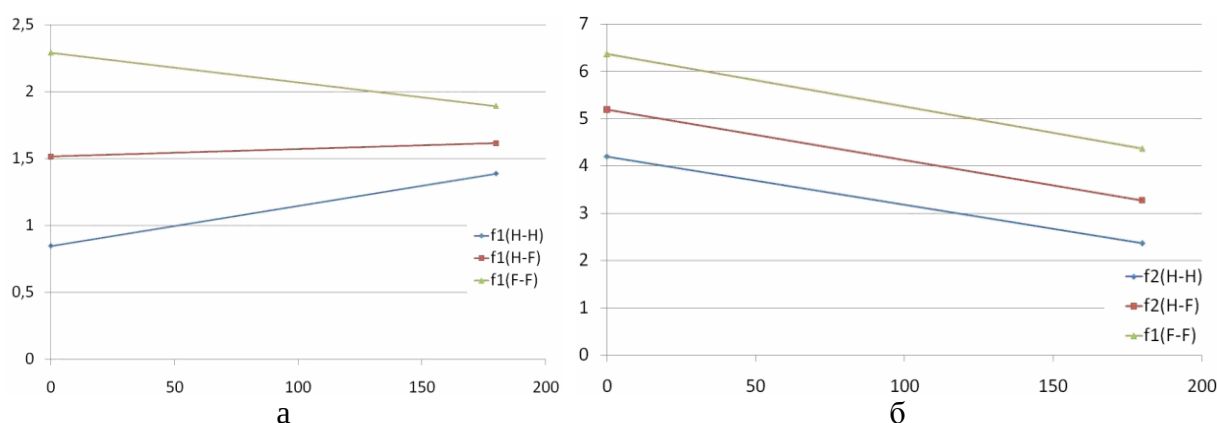


Рис. 7. Относительные значения частот криволинейной балки

Результаты на рисунке 7 показывают, как соотносится первая и вторая собственные частоты криволинейной балки относительно первой собственной частоты прямолинейной шарнирной балки. Заметно, что с увеличением угла дуги криволинейной балки, ее первая собственная частота стремится к некоторому среднему значению, а вторая собственная частота монотонно падает. При этом при одинаковых прочих параметрах во всех случаях первая и вторая собственные частоты криволинейной балки будут выше, чем у прямолинейной балки.

Заключение

В данной работе на основе известных аналитических зависимостей предложены упрощенные формулы для определения собственных частот криволинейных участков при различных закреплениях. Проведенное сравнение результатов расчета по предложенным формулам и справочным данным, а также с методом конечных элементов показали расхождение не более 6%, что и являлось целью данной работы. Полученные упрощенные формулы можно использовать для предварительной оценки первой и второй собственных частот криволинейных участков в составе стержневой конструкции.

Благодарность

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Правительства Красноярского края и Красноярского краевого фонда науки в рамках научного проекта № 20-48-242922.

Список литературы

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Дрофа, 2004. – 591 с
2. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.
3. Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность, устойчивость, колебания. Т. 3. – М.: Машиностроение, 1988. – 567 с.

4. Доев В.С. Поперечные колебания балок. – М.: КНОРУС, 2016. – 412 с.
5. Auciello N.M., De Rosa M.A. Free vibrations of circular arches: a review // *Journal of Sound and Vibration*. 1994, vol. 176, iss. 4, pp. 433-458. DOI: 10.1006/jsvi.1994.1388.
6. Chidamparam P., Leissa A.W. Vibrations of Planar Curved Beams, Rings, and Arches// *Applied Mechanics Reviews*. 1993, vol. 46, iss. 9, pp. 467-483. DOI: 10.1115/1.3120374.
7. Yang F., Sedaghati R., Esmailzadeh E. Free in-plane vibration of curved beam structures: a tutorial and the state of the art // *Journal of Vibration and Control*. 2018, vol. 24, no. 12, pp. 2400-2417.
8. Markus S., Nanasi T. Vibrations of curved beams // *Shock and Vibration Digest*. 1981, vol. 13, no. 4, pp. 3-14.
9. Laura P.A.A., Maurizi M.J. Recent research on vibrations of arch-type structures // *Shock and Vibration Digest*. 1987, vol. 19, no. 1, pp. 6-9.
10. Henrych J. The dynamics of arches and frame. – Amsterdam; New York: Elsevier Scientific Pub. Co., 1981. – 463 p.
11. Culver C.G., Oestel D.J. Natural Frequencies of Multispan Curved. Beams // *Journal of Sound and Vibration*. 1967, vol. 10, iss. 3, pp. 380-389.
12. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
13. Виноградов В.И. Определение собственных частот криволинейных стержней // *Материалы 2 Белорусского конгресса по теоретической и прикладной механике*. – Минск: ИММС НАН Белоруссии, 1999. – С. 301.
14. Серазутдинов М.Н., Хайруллин Ф.С., Конычев В.А. Расчет собственных частот колебаний криволинейных стержней // *Труды Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи»*. – Самара: СамГТУ, 2004. – С. 200-203.
15. Грудев И.Д. Колебания криволинейных стержней. – М.: МИК, 2007. – 254 с.
16. Джумаев З.Ф., Хамроев Х.Х., Фатиллоев С.З. Линейные колебания упругого криволинейного стержня // *Молодой ученый*. 2016. №12(116). С. 250-252.
17. Ахатов А.Р., Ахтямов А.М. Уравнения изгибно-крутильных колебаний криволинейного стержня и поиск их собственных значений в математическом пакете MAPLE // *Сборник материалов международной научно-практической конференции «Современные тенденции развития науки и производства»*. – Кемерово: ЗапСибНЦ, 2020. – С. 67-69.
18. Baxy A., Sarkar At. Free vibrations of circular curved beams // *MATEC Web of Conferences*. 2018, vol. 211, p. 04006. DOI: 10.1051/mateconf/201821104006.
19. Bickford W.B., Maganty S. On the out-of-plane vibrations of thick rotating rings // *Journal of Sound and Vibration*. 1986, vol. 110, pp. 121-127.
20. Chang. C.-S., Hodges D. Vibration Characteristics of Curved Beams // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2009, vol. 4(4), pp. 675-692. DOI: 10.2140/jomms.2009.4.675.
21. Ding S., Wu J., Xie L., Zhang Y., Wang J., Wu R. In-plane free vibrations of curved Timoshenko beams with the rayleigh-ritz method // *13th Symposium on Piezoelectricity, Acoustic Waves and Device Applications (SPAWDA)*. 2019, pp. 1-4. DOI: 10.1109/SPAWDA.2019.8681787.
22. Karnovsky I.A. Theory of Arched Structures: Strength, Stability, Vibration. – Canada: Springer, 2013. – DOI: 10.1007/978-1-4614-0469-9.
23. Kaygisiz K. Out Out-of-plane vibrations of planar curved beams having variable curvature and cross-section. – 2012. – 44p.
24. Горшков А.Г. Сопротивление материалов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 544с.
25. Blevins R.D. Formulas for Dynamics, Acoustics and Vibration. – Chichester: John Wiley & Sons, Ltd, 2015. – DOI: 10.1002/9781119038122.
26. Галанин М.П. Методы численного анализа математических моделей. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 591 с.
27. Chapra S.C., Canale R.P. Numerical Methods for Engineers. – New York: McGraw-Hill, Higher Education, 2014. – 994p.
28. Stolarski T. Engineering analysis with Ansys software. – London, 2018. – 553 p.

References

1. Babakov I.M. Theory of Vibrations. M.: Drofa, 2004. 591 p.
2. Biderman V.L. Theory of Mechanical Vibrations. M.: Higher School, 1980. 408 p.
3. Birger I.A., Panovko Y.G. Strength, Stability, Vibrations. Vol. 3. M.: Mechanical Engineering, 1988. 567 p.
4. Doev V.S. Transverse vibrations of beams. M.: KNORUS, 2016. 412 p.
5. Auciello N.M., De Rosa M.A. Free vibrations of circular arches: a review // *Journal of Sound and Vibration*. 1994, vol. 176, iss. 4, pp. 433-458. DOI: 10.1006/jsvi.1994.1388.
6. Chidamparam P., Leissa A.W. Vibrations of Planar Curved Beams, Rings, and Arches// *Applied Mechanics Reviews*. 1993, vol. 46, iss. 9, pp. 467-483. DOI: 10.1115/1.3120374.
7. Yang F., Sedaghati R., Esmailzadeh E. Free in-plane vibration of curved beam structures: a tutorial and the state of the art // *Journal of Vibration and Control*. 2018, vol. 24, no. 12, pp. 2400-2417.
8. Markus S., Nanasi T. Vibrations of curved beams // *Shock and Vibration Digest*. 1981, vol. 13, no. 4, pp. 3-14.

9. Laura P.A.A., Maurizi M.J. Recent research on vibrations of arch-type structures // Shock and Vibration Digest. 1987, vol. 19, no. 1, pp. 6-9.
10. Henrych J. The dynamics of arches and frame. – Amsterdam; New York: Elsevier Scientific Pub. Co., 1981. – 463 p.
11. Culver C.G., Oestel D.J. Natural Frequencies of Multispan Curved. Beams // Journal of Sound and Vibration. 1967, vol. 10, iss. 3, pp. 380-389.
12. Timoshenko S.P. Vibrations in Engineering. M.: Engineering, 1985. 472 p.
13. Vinogradov V.I. Determination of natural frequencies of curvilinear rods // Proceedings of II Belorussian Congress on Theoretical and Applied Mechanics. Minsk: IMMS of Belarus National Academy of Sciences, 1999. P. 301.
14. Serazutdinov M.N., Hajrullin F.S., Konychev V.A. Calculation of natural frequencies of vibrations of curvilinear rods // Proceedings of the All-Russian Scientific Conference "Mathematical Modelling and Boundary Problems". Samara: Samara State University, 2004. P. 200-203.
15. Grudev I.D. Fluctuations of curvilinear rods. M.: MIK, 2007. 254 p.
16. Dzhumaev Z.F., Khamroev Kh.H., Fatilloev S.Z. Linear vibrations of an elastic curvilinear rod // Young scientist. 2016. No. 12(116). P. 250-252.
17. Akhatov A.R., Akhtiamov A.M. Equations of bending-torsional vibrations of a curvilinear rod and the search for their eigenvalues in the mathematical package MAPLE // Proceedings of the International Scientific and Practical Conference "Modern trends in the development of science and industry". Kemerovo: ZapSibNTs, 2020. P. 67-69.
18. Baxy A., Sarkar At. Free vibrations of circular curved beams // MATEC Web of Conferences. 2018, vol. 211, p. 04006. DOI: 10.1051/mateconf/201821104006.
19. Bickford W.B., Maganty S. On the out-of-plane vibrations of thick rotating rings // Journal of Sound and Vibration. 1986, vol. 110, pp. 121-127.
20. Chang. C.-S., Hodges D. Vibration Characteristics of Curved Beams // Journal of Mechanics of Materials and Structures. 2009, vol. 4(4), pp. 675-692. DOI: 10.2140/jomms.2009.4.675.
21. Ding S., Wu J., Xie L., Zhang Y., Wang J., Wu R. In-plane free vibrations of curved Timoshenko beams with the rayleigh-ritz method // 13th Symposium on Piezoelectricity, Acoustic Waves and Device Applications (SPAWDA). 2019, pp. 1-4. DOI: 10.1109/SPAWDA.2019.8681787.
22. Karnovsky I.A. Theory of Arched Structures: Strength, Stability, Vibration. – Canada: Springer, 2013. – DOI: 10.1007/978-1-4614-0469-9.
23. Kaygisiz K. Out Out-of-plane vibrations of planar curved beams having variable curvature and cross-section. – 2012. – 44p.
24. Gorshkov A.G. Resistance of materials. M.: FIZMATLIT, 2005. 544 p.
25. Blevins R.D. Formulas for Dynamics, Acoustics and Vibration. – Chichester: John Wiley & Sons, Ltd, 2015. – DOI: 10.1002/9781119038122.
26. Galanin M.P. Methods of numerical analysis of mathematical models. M.: Publ. house of Bauman Moscow State Technical University, 2012. 591 p.
27. Chapra S.C., Canale R.P. Numerical Methods for Engineers. – New York: McGraw-Hill, Higher Education, 2014. – 994p.
28. Stolarski T. Engineering analysis with Ansys software. – London, 2018. – 553 p.

Сведения об авторах:

Information about authors:

Рабецкая Ольга Ивановна – кандидат технических наук, доцент кафедры технической механики	Rabetskaya Olga Ivanovna – candidate of technical sciences, assistant professor, department of technical mechanics
Кудрявцев Илья Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной механики	Kudryavtsev Ilya Vladimirovich – candidate of technical sciences, assistant professor, department of applied mechanics
Колотов Андрей Васильевич – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной механики	Kolotov Andrey Vasilyevich – candidate of technical sciences, assistant professor, department of applied mechanics
Митяев Александр Евгеньевич – кандидат технических наук, заведующий кафедрой прикладной механики	Mityaev Alexander Evgenievich – candidate of technical sciences, head of the department of applied mechanics
olga_rabez@mail.ru	

Получена 11.06.2022