

КОНЦЕПЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТОВ В ОЦЕНКЕ СТРУКТУРНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Елисеев А.В.^{1,2}, Кузнецов Н.К.², Николаев А.В.¹

¹*Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск;*

²*Иркутский национальный исследовательский технический университет, Иркутск*

Ключевые слова: структурное математическое моделирование, динамика вибрационных взаимодействий, связность силовых возмущений, формы взаимодействий элементов систем, динамические инварианты.

Аннотация. Работа направлена на создание научно-методологического базиса для решения задач повышения надежности и обеспечения безопасности эксплуатации железнодорожного транспорта в условиях увеличения нагрузок на колесную пару, значительного возрастания веса поездов при одновременном увеличении скоростей движения. Возникающая проблема связана с возрастанием уровня действия вибрационных процессов, формируемых неравномерностями, динамической жесткостью рельсового пути, неровностей рельсовых нитей, эффектами роста динамических нагрузок, возникающих между движущимися экипажами подвижного состава. Научно-методологический базис разрабатывается в рамках методологии структурного математического моделирования, основанной на сопоставлении механическим колебательным системам, используемым в качестве расчетных схем технических объектов транспортного и технологического назначения, эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления. Развивается концепция динамических инвариантов, позволяющая построить разбиение бесконечного множества амплитудно-частотных характеристик передаточных функций системы на конечное множество классов, получивших условное название динамических инвариантов. Разработан подход для оценки изменений структурных особенностей механических колебательных систем с помощью изменения соответствующей совокупности динамических инвариантов.

THE CONCEPT OF DYNAMIC INVARIANTS IN THE EVALUATION OF STRUCTURAL FEATURES OF MECHANICAL OSCILLATORY SYSTEMS

Eliseev A.V.^{1,2}, Kuznetsov N.K.², Nikolaev A.V.¹

¹*Irkutsk State Transport University, Irkutsk;*

²*Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk*

Keywords: structural mathematical modeling, dynamics of vibrational interactions, connectivity of force disturbances, forms of interactions of system elements, dynamic invariants.

Abstract. The work is aimed at creating a scientific and methodological basis for solving the problems of improving the reliability and ensuring the safety of railway transport operation in conditions of increasing loads on the wheelset, a significant increase in the weight of trains while increasing the speed of movement. The emerging problem is associated with an increase in the level of action of vibration processes formed by irregularities, dynamic rigidity of the rail track, irregularities of rail threads, the effects of the growth of dynamic loads arising between moving crews of rolling stock. The scientific and methodological basis is being developed within the framework of the methodology of structural mathematical modeling. The methodology is based on the comparison of dynamically equivalent automatic control systems to mechanical oscillatory systems. Mechanical oscillatory systems are used as design schemes of technical objects of transport and technological purposes. The concept of dynamic invariants is being developed, which makes it possible to construct a partition of an infinite set of amplitude-frequency characteristics of the transfer functions of the system into a finite set of classes, conventionally called dynamic invariants. An approach has been developed to evaluate changes in the structural features of mechanical oscillatory systems by changing the corresponding set of dynamic invariants.

Введение. В настоящее время особое значение приобретают проблемы обеспечения динамического качества взаимодействия элементов технических объектов транспортного и технологического назначения. В транспортной отрасли возникающие проблемы связаны с возрастанием уровня действия вибрационных процессов, формируемых неравномерностями, динамической жесткостью рельсового пути, неровностей рельсовых нитей, эффектами роста динамических нагрузок. Обозначенные проблемы предопределяют внимание к разработке

научно-методологического базиса решения широкого круга задач динамики технических объектов, находящихся в условиях вибрационного нагружения [1-3].

В оценке динамических состояний технических объектов распространение получили методы структурного математического моделирования. В рамках таких подходов технический объект, расчетная схема которого представляет собой механическую колебательную систему с несколькими степенями свободы, может быть представлен эквивалентной в динамическом отношении системой автоматического управления [4-8].

Для элементов механических колебательных систем динамические особенности в виде критических состояний и динамических форм взаимодействий могут быть представлены, с обобщенной точки зрения, своеобразными динамическими инвариантами и их интегральными характеристиками, отражающими суммарное количество режимов обнуления, резонансов и количество знакоопределённых форм динамический взаимодействий.

Вместе с тем, методы оценки динамических свойств механических колебательных систем, находящихся в условиях воздействия со стороны связанных силовых возмущений, не обладают достаточным уровнем детализации для возможности интерпретации структурных особенностей в виде однозначного набора динамических инвариантов.

Статья посвящена разработке подходов к оценке с помощью динамических инвариантов структурных особенностей механических колебательных систем цепного типа, находящихся в условиях связанных возмущений силовой природы.

I. Основные положения. Постановка задачи. Рассматривается модельная механическая колебательная система (рис. 1), где m_1 , m_2 – массоинерционные элементы; k_1 , k_2 , k_3 – упругие элементы, z_1 , z_2 – кинематические возмущения; Q_1 , Q_2 – внешние связанные силовые возмущения; y_1 , y_2 – обобщенные координаты системы; I, II – опорные поверхности. Массоинерционные элементы системы совершает малые установившиеся колебания относительно положения статического равновесия с начальными нулевыми условиями.

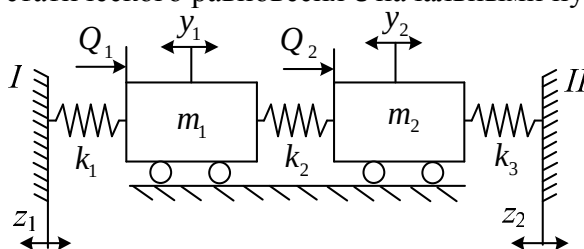


Рис. 1. Расчетная схема механической колебательной системы

Силовые возмущения Q_1 и Q_2 связаны между собой линейной функциональной зависимостью $Q_2 = \gamma Q_1$, где γ – коэффициент связности. Если коэффициент связности γ обращается в ноль, то внешняя сила Q_1 , приложенная к массоинерционному элементу m_1 , формирует отношение амплитуды колебания координаты y_1 к амплитуде колебания силового возмущения Q_1 , с физической точки зрения интерпретируемое как податливость, зависящую от частоты силового воздействия. Для механической колебательной системы, собственные частоты которой отличны от нуля и различны, особенности совокупности динамических податливостей определяются парциальными и собственными частотами системы. Вместе с тем, в механической колебательной системе, обладающей структурными особенностями, приложение к массоинерционному элементу m_2 дополнительной силы γQ_1 с учетом коэффициента связности γ может привести к изменению значений податливостей и формированию специфических совокупностей, зависящих от широкого диапазона частот, динамических податливостей.

Задача заключается в разработке метода оценки структурных и динамических особенностей механических колебательных систем с двумя степенями свободы цепного типа, находящихся под воздействием связанных силовых возмущений, с помощью интегральных характеристик динамических инвариантов.

II. Математическая модель. Система дифференциальных уравнений может быть построена в рамках формализма Лагранжа. Для построения системы дифференциальных уравнений рассматривается потенциальная и кинетическая энергия:

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 (y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_2 - y_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 (y_2 - z_2)^2, \quad (1)$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2. \quad (2)$$

Система соответствующих уравнений Лагранжа второго рода может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + (k_1 + k_2) y_1 - k_2 y_2 = Q_1 + k_1 z_1, \\ m_2 \ddot{y}_2 + (k_2 + k_3) y_2 - k_2 y_1 = Q_2 + k_3 z_2. \end{cases} \quad (3)$$

Далее система дифференциальных уравнений (3) с помощью интегральных преобразований Лапласа с учётом нулевых начальных условий преобразуется к алгебраической системе в изображениях[9]:

$$\begin{cases} (m_1 p^2 + k_1 + k_2) \bar{y}_1 - k_2 \bar{y}_2 = \bar{Q}_1 + k_1 \bar{z}_1, \\ (m_2 p^2 + k_2 + k_3) \bar{y}_2 - k_2 \bar{y}_1 = \bar{Q}_2 + k_3 \bar{z}_2, \end{cases} \quad (4)$$

где $p = j\omega$ – комплексная переменная, $j = \sqrt{-1}$, ω – частота внешнего возмущения, символ « $\rightarrow$ » над переменной обозначает изображение Лапласа.

На основе известных методов [10] система уравнений в изображениях (4) может быть представлена структурной схемой эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления (рис. 2).

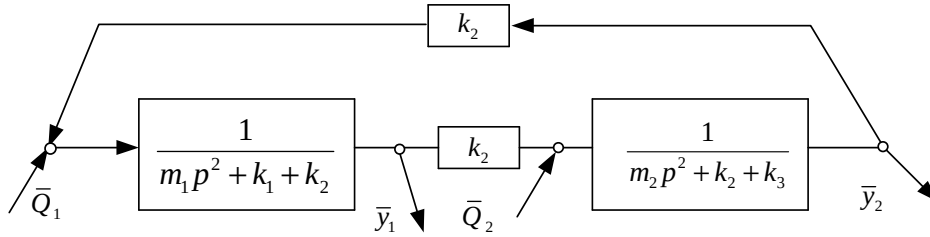


Рис. 2. Структурная схема системы (рис. 1) при условии $z_1=0, z_2=0$

Силовое возмущение $\bar{Q}_1$ рассматривается как входной сигнал, а $\bar{y}_1$ – как выходная реакция системы.

1. Передаточные функции системы (рис. 2) имеют вид:

$$\bar{Q}_1 \neq 0, \quad W_{11}(p) = \left. \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} \right|_{\substack{z_1=0 \\ z_2=0}} = \frac{m_2 p^2 + k_2 + k_3}{(m_1 p^2 + k_1 + k_2)(m_2 p^2 + k_2 + k_3) - k_2^2}, \quad (5)$$

$$\bar{Q}_1 \neq 0, \quad W_{21}(p) = \left. \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1} \right|_{\substack{z_1=0 \\ z_2=0}} = \frac{k_2}{(m_1 p^2 + k_1 + k_2)(m_2 p^2 + k_2 + k_3) - k_2^2}. \quad (6)$$

При условии связности внешних силовых возмущений

$$Q_2 = \gamma Q_1 \quad (7)$$

передаточные отношения принимают вид:

$$\bar{Q}_1 \neq 0, \quad \bar{Q}_2 = \gamma \bar{Q}_1, \quad W_{11}(\gamma, p) = \left. \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} \right|_{\substack{z_1=0 \\ z_2=0}} = \frac{m_2 p^2 + k_2 + k_3 + \gamma k_2}{(m_1 p^2 + k_1 + k_2)(m_2 p^2 + k_2 + k_3) - k_2^2}, \quad (8)$$

$$\bar{Q}_1 \neq 0, \quad \bar{Q}_2 = \gamma \bar{Q}_1, \quad W_{21}(\gamma, p) = \left. \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1} \right|_{\substack{z_1=0 \\ z_2=0}} = \frac{\gamma(m_1 p^2 + k_1 + k_2) + k_2}{(m_1 p^2 + k_1 + k_2)(m_2 p^2 + k_2 + k_3) - k_2^2}, \quad (9)$$

2. Амплитудно-частотная характеристика (8):

$$W_{11}(\gamma, p)|_{p=j\omega} = \frac{-m_2\omega^2 + k_2 + k_3 + \gamma k_2}{m_1 m_2 \omega^4 - (m_2(k_1 + k_2) + m_1(k_2 + k_3))\omega^2 + k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3}. \quad (10)$$

Выражение (10) может быть приведено к виду:

$$A_{11}(\omega) = W_{11}(\gamma, p)|_{p=j\omega} = \frac{-m_2(\omega^2 - (n_2^2 + \gamma \Delta_2^2))}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}, \quad (11)$$

где $\omega_1^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2}\right)^2 + \Delta_1^2 \Delta_2^2}$, $\omega_2^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2}\right)^2 + \Delta_1^2 \Delta_2^2}$, $n_1^2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1}$, $n_2^2 = \frac{k_2 + k_3}{m_2}$, $\Delta_1^2 = \frac{k_2}{m_1}$, $\Delta_2^2 = \frac{k_2}{m_2}$.

В выражении (11) ω_1^2 , ω_2^2 – собственные частоты системы, n_1^2 , n_2^2 – парциальные частоты, Δ_1^2 , Δ_2^2 – характерные частоты фрагментов системы.

Множество всевозможных амплитудно-частотных характеристик в зависимости от коэффициента связности γ может быть определено на основе так называемой частотной функции обнуления амплитуды колебания координаты y_1 :

$$\omega^2(\gamma) = n_2^2 + \Delta_2^2 \gamma. \quad (12)$$

В общем случае частотная функция обнуления (12) определяет частоту $\omega(\gamma)$ внешнего возмущения Q_1 , на которой обнуляется амплитуда колебания координаты y_1 .

3. При условии $m_1 > 0$, $m_2 > 0$, $k_2 > 0$, $\omega_1 > 0$ частотная функция обнуления определяет три критических значения коэффициента связности γ_0 , γ_1 , γ_2 , где γ_0 – коэффициент связности, который определяет граничную точку коэффициентов связности, обеспечивающих существование режимов обнуления амплитуд обнуления координаты y_1 объекта на конечной частоте; γ_1 – коэффициент связности, для которого частота обнуления приближается к первой собственной частоте колебания; γ_2 – коэффициент связности, для которого частота обнуления приближается со второй собственной частотой колебания (рис. 3).

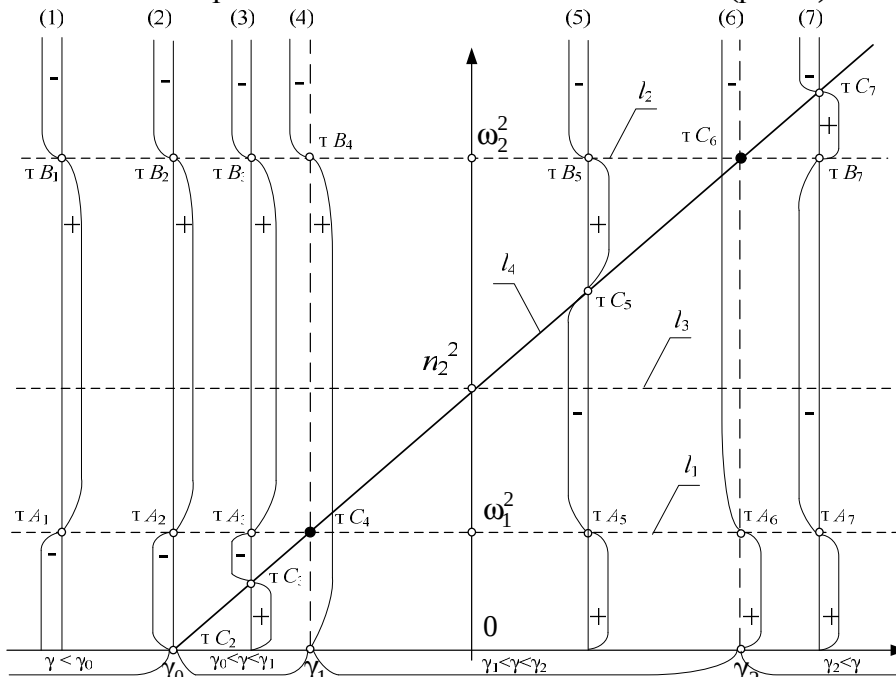


Рис. 3. Частотная функция обнуления амплитуды колебания координата y_1 для системы при условии $0 < \omega_1^2$, $0 < \Delta_2^2$

Точки пересечения частотной функции обнуления с горизонтальными графиками собственных частот системы определяют разбиение множества коэффициентов связности на интервалы и точечные множества, на которых соответствующие амплитудно-частотные

характеристики передаточной функции сохраняют существенные свойства, выражаемые в количестве частот обнуления, резонансов и знакоопределенных ветвей (рис. 4).

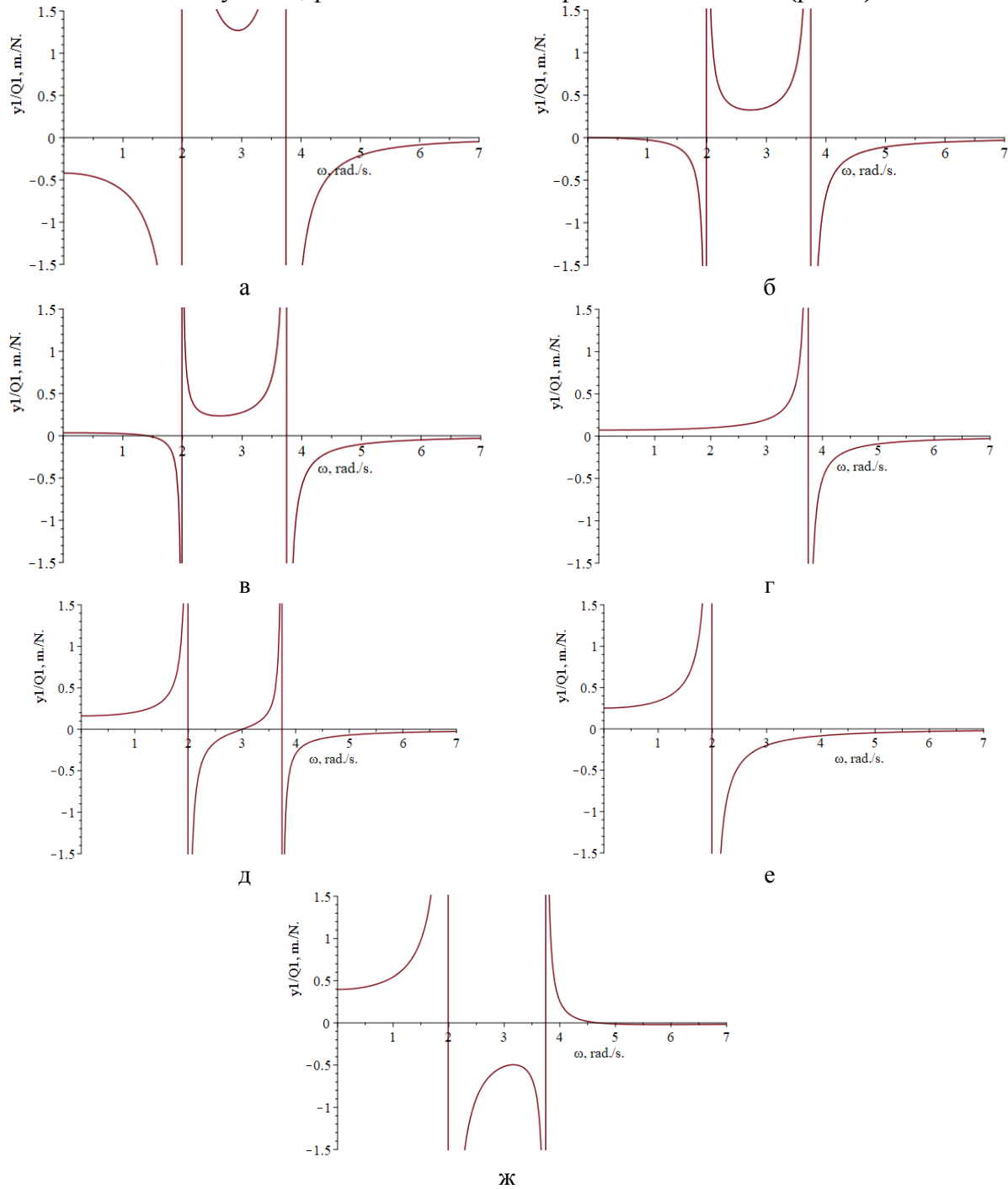


Рис. 4. Амплитудно-частотные характеристики в зависимости от коэффициента связности:

а – $\gamma < \gamma_0$, б – $\gamma = \gamma_0$, в – $\gamma_0 < \gamma < \gamma_1$, г – $\gamma = \gamma_1$, д – $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$, е – $\gamma = \gamma_2$, ж – $\gamma_2 < \gamma$

Бесконечное множество амплитудно-частотных характеристик может быть представлено в виде конечного набора динамических инвариантов (табл. 1).

Динамический инвариант в общем случае представляет ориентированный граф, отображающий особенности обнуления, разрывы второго рода и знакоопределенных ветвей амплитудно-частотных характеристик.

Количественные характеристики динамических инвариантов могут быть представлены в унифицированной форме выражениями $S_i^j F_k^l$, где I – количество состояний обнуления амплитуд колебаний, j – количество резонансов, k – количество отрицательных динамических форм взаимодействий, l – количество положительных форм взаимодействий (табл. 1, стр. II).

4. В качестве обобщенной интегральной характеристики динамических инвариантов может быть выбрана сумма особенностей в виде количества резонансов, частот обнуления амплитуд колебания, знакоопределенных форм динамических взаимодействий элементов механической колебательной системы, находящейся под воздействием связанных силовых возмущений. Пример такой интегральной характеристики может быть представлен в виде J_m , где m – сумма особенностей динамических инвариантов (табл. 1, стр. III).

Существенные особенности амплитудно-частотных характеристик, отображаемые в виде количества частот обнуления амплитуд колебания, частот резонансов, положительных и отрицательных ветвей, в своей совокупности передающих динамические особенности механических колебательных систем, могут быть представлены так называемыми динамическими инвариантами, нашедших своё отражение в виде ориентированных графов, представление которых определяется в том числе и коэффициентом связности γ внешних силовых возмущений (табл. 1).

Табл. 1. Динамические инварианты механической колебательной системы

I	$\gamma < \gamma_0$	$\gamma = \gamma_0$	$\gamma_0 < \gamma < \gamma_1$	$\gamma = \gamma_1$	$\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$	$\gamma = \gamma_2$	$\gamma_2 < \gamma$
II	$S_0^2 F_2^1$	$S_1^2 F_2^1$	$S_1^2 F_2^2$	$S_0^1 F_1^1$	$S_1^2 F_2^2$	$S_0^1 F_1^1$	$S_1^2 F_2^2$
III	J_5	J_6	J_7	J_3	J_7	J_3	J_7

5. Детализированные по типам особенностей характеристики динамических инвариантов (табл. 1) механической колебательной системы (рис. 1) могут быть представлены графиками кусочно-постоянных функций в зависимости от коэффициента связности внешних силовых возмущений (рис. 5).

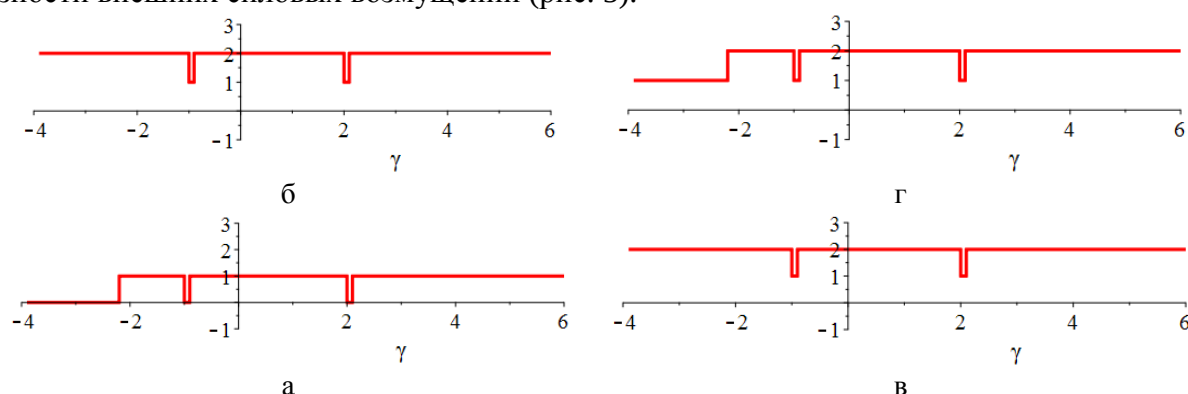


Рис. 5. Детализированные по типам особенностей характеристики динамических инвариантов механической колебательной системы: а – количество частот обнуления амплитуд колебания координаты y_1 , б – количество резонансов, в – количество отрицательных форм динамических взаимодействий элементов механической колебательной систем, г – количество положительных форм взаимодействий

Интегральная характеристика (рис. 6), представляющая собой алгебраическую сумму детализированных характеристик, отображает сохранение количества динамических особенностей на интервалах $(-\infty, \gamma_0)$, (γ_0, γ_1) , (γ_1, γ_2) , (γ_2, ∞) .

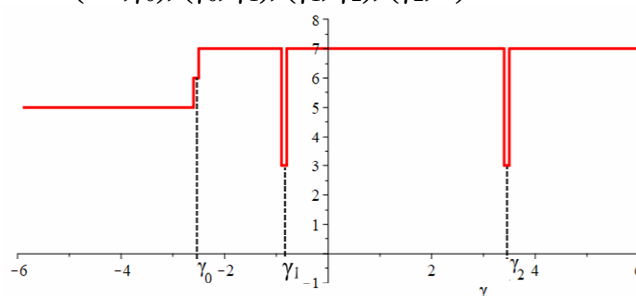


Рис. 6. Интегральная характеристика механической колебательной системы: $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ – критические значения коэффициента связности

6. Таким образом, при условии $m_1 > 0$, $m_2 > 0$, $k_2 > 0$, $\omega_1 > 0$ для механической колебательной системы представлен метод, позволяющий построить интегральную характеристику, отображающую количество динамических особенностей.

Интегральная характеристика механической колебательной системы может быть интерпретирована как разбиение множества коэффициентов связности на сегменты, в каждом из которых система обладает фиксированными динамическими характеристиками. Сегмент может представлять собою, либо некоторое точечное критическое значение коэффициента связности, либо открытый интервал значений коэффициентов связности, в каждой точке которого амплитудно-частотная характеристика обладает фиксированным набором особенностей.

Вместе с тем, изменение параметров системы может привести к нарушению условий $m_1 > 0$, $m_2 > 0$, $k_2 > 0$, $\omega_1 > 0$, что найдет отражение в разбиении множества коэффициентов связности, обладающим динамическим инвариантами с новыми интегральными характеристиками.

В качестве вариантов структурных изменений, вносимых в механическую колебательную систему, могут быть рассмотрены обнуления параметров упругих или массоинерционных элементов, а также их предельно большие или предельно малые значения.

III. Интегральные динамические характеристики в оценке структурных изменений механических колебательных систем. На основе исходной механической колебательной системы могут быть рассмотрены структурные изменения системы, вызванные обнулением жесткостей, масс или неограниченным возрастанием их значений.

1. Рассматривается коэффициент жесткости, принимающий предельно малые значения, т.е. $k_3 = 0$. Структурные изменения цепной системы (рис. 1) выражаются в обнулении упругой связи с опорной поверхностью II. Расчетная и структурная схемы представлены на рисунке 7.

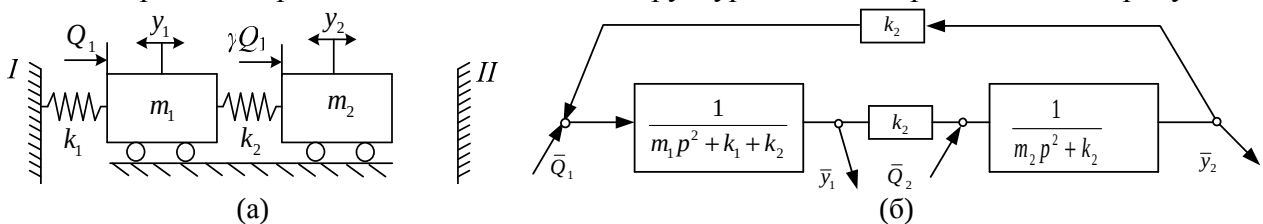


Рис. 7. Расчетная схема механической колебательной системы (рис. 1) с учетом $k_3 = 0$

В предположении, что $k_3 = 0$, можно показать, что для собственных частот ω_1^2 , ω_2^2 , а также для частоты Δ_2^2 выполнены условия

$$0 < \omega_1^2 < \omega_2^2, \quad (13)$$

$$0 < \Delta_2^2. \quad (14)$$

Частотная функция обнуления $\omega^2(\gamma)$ имеет вид:

$$\omega^2(\gamma) = \Delta_2^2 (1 + \gamma). \quad (15)$$

Можно полагать, что совокупность динамических инвариантов сохраняет свои характеристики $S_0^1 F_1^1$, $S_0^2 F_2^1$, $S_1^2 F_2^1$, $S_1^2 F_2^2$ или J_3 , J_5 , J_6 , J_7 без изменений.

В таблице 2 представлено распределение интегральной характеристики J по значениям коэффициентов связности γ внешних силовых возмущений Q_1 и Q_2 . График интегральной характеристики представлен на рисунке 8.

Табл. 2. Распределение динамических инвариантов по значениям коэффициента связности при условии $k_3 = 0$

	1	2	3	4	5	6	7
I	(∞, γ_0)	$\{\gamma_0\}$	(γ_0, γ_1)	$\{\gamma_1\}$	(γ_1, γ_2)	$\{\gamma_2\}$	(γ_2, ∞)
II	$S_0^2 F_2^1$	$S_1^2 F_2^1$	$S_1^2 F_2^2$	$S_0^1 F_1^1$	$S_1^2 F_2^2$	$S_0^1 F_1^1$	$S_1^2 F_2^2$
III	J_5	J_6	J_7	J_3	J_7	J_3	J_7

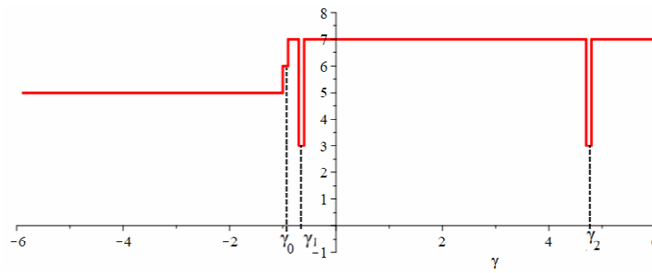


Рис. 8. Интегральная характеристика механической колебательной системы при условии $k_3=0$ в зависимости от коэффициента связности: $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ – критические значения коэффициента связности, определяемые по результатам изменений структуры, вызванных обнулением упругой связи k_3 с опорной поверхностью II

Можно предположить, что «точечные» характеристики отражают признаки неустойчивости, нарушая непрерывность при изменении коэффициента связности γ . В свою очередь, «интервальные» характеристики сохраняют свои значения на открытых интервалах и отображают признаки устойчивости.

Таким образом, совокупность обобщенных характеристик механической колебательной системы остается без изменений.

Наравне с обнулением упругой связи k_3 с опорной поверхностью I аналогично может быть обнулена упругая связь с k_1 с опорной поверхностью II.

2. Рассматривается обнуление упругой связи с опорной поверхностью I, т.е. $k_1=0$. Рассматривается механическая колебательная система (рис. 1), при условии, что упругая связь k_1 с опорной поверхностью I обнуляется, т.е. $k_1=0$. Расчетная и структурная схемы представлены на рисунке 9.

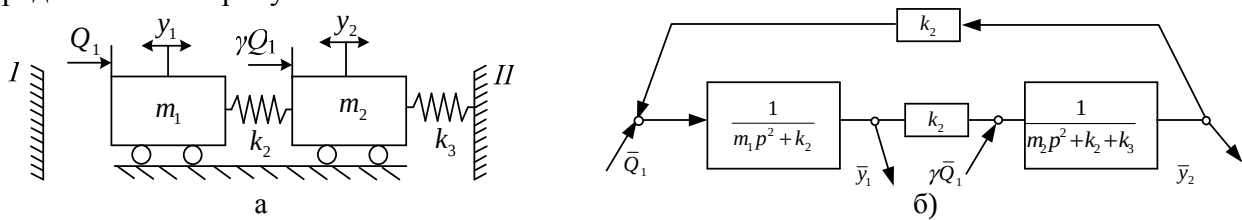


Рис. 9. Расчетная схема механической колебательной системы (рис. 1) с учетом $k_1=0$: а – расчетная схема, б – структурная схема

Пусть для механической колебательной системы при условии $k_1=0$ также выполнены условия (13), (14).

На основе амплитудно-частотной характеристики передаточной функции (5) может быть построена частотная функция обнуления $\omega^2(\gamma)$:

$$\omega^2(\gamma) = n_2^2 + \gamma \Delta_2^2. \quad (16)$$

При выполнении условий (13), (14) амплитудно-частотные характеристики обладают множеством динамических инвариантов с показателями $S_0^2 F_2^1$, $S_1^2 F_2^2$, $S_0^1 F_1^1$, $S_1^2 F_2^1$. Соответствующая интегральная характеристика имеет кусочно-постоянную форму графика (рис. 10), принимая значения 3 и 6 в критических точках $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ коэффициента связности и значения 5 и 7 в интервалах $(-\infty, \gamma_0)$, (γ_0, γ_1) , (γ_1, γ_2) и (γ_2, ∞) .

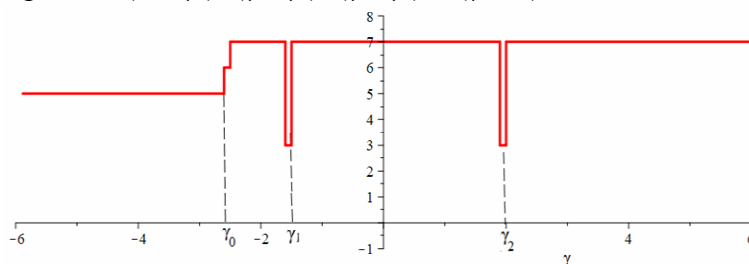


Рис. 10. График интегральной характеристики: $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ – критические значения коэффициента связности

Таким образом, многообразие динамических особенностей системы при условии обнуления упругой связи $k_1=0$ остается без изменений. Вместе с тем, возможно изменение структуры путем одновременного обнуления упругих связей с обеими опорными поверхностями.

Следовательно, изменение структурной специфики механической колебательной системы, выражаемое обнулением одной из упругих связей с опорной поверхностью, не приводит к изменению многообразия динамических особенностей систем.

3. Рассматривается вариант одновременного обнуления упругих связей с обеими опорными поверхностями I и II , т.е. $k_1=0$, $k_3=0$. Такая система называется диадой (рис. 11).

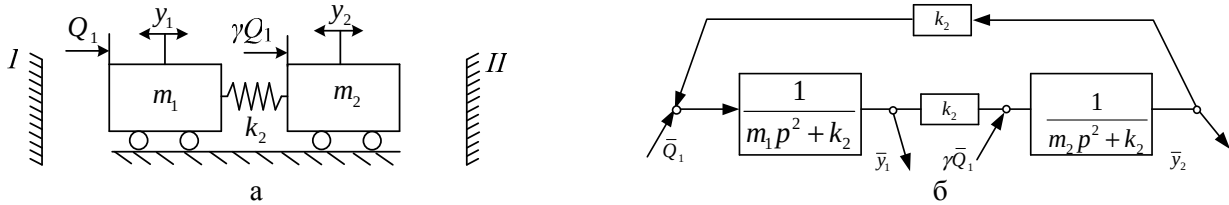


Рис. 11. Расчетная схема механической колебательной системы (рис. 1) с учетом $k_3=0$, $k_1=0$:
а – расчетная схема, б – структурная схема диады

На основе структурной схемы (рис. 11) может быть построена передаточная функция с амплитудно-частотной характеристикой:

$$W_{11}(\gamma, p) \Big|_{p=j\omega} = \frac{-m_2(\omega^2 + \frac{k_2}{m_2}(1+\gamma))}{m_1 m_2 \omega^2 (\omega^2 - k_2 \frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2})}. \quad (17)$$

Соответствующая частотная функция обнуления амплитуды колебания координаты y_1 принимает вид:

$$\omega^2(\gamma) = \Delta_2^2(1+\gamma). \quad (18)$$

Собственные частоты диады определяются выражениями:

$$\omega_1^2 = 0, \quad (19)$$

$$\omega_2^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2, \quad (20)$$

которые не согласованы с условиями (19), (20).

График частотной функции обнуления (18) с учётом собственных частот (19), (20) позволяет для механической колебательной системы определить критические коэффициенты связности, в которых частота обнуления совпадает с собственными частотами системы при условии, что первая собственная частота равна нулю (рис. 12).

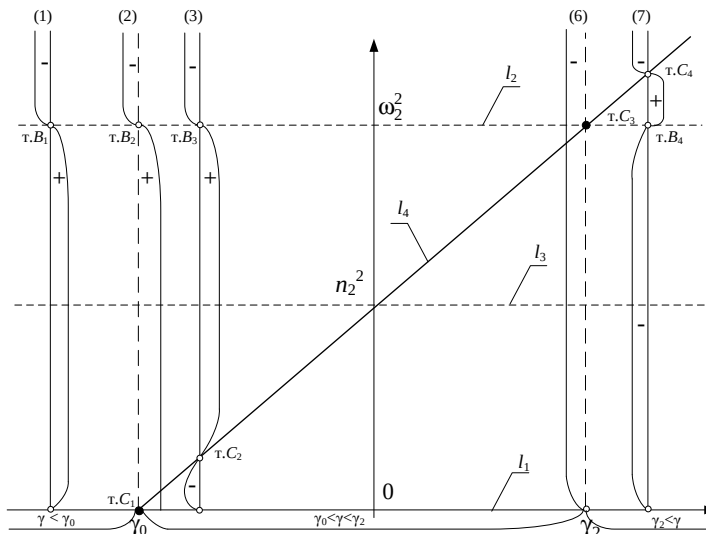


Рис. 12. Частотная функция обнуления амплитуды колебания координаты y_1 диады ($k_3=0$, $k_1=0$)

Критические значения коэффициента связности γ_0, γ_2 разбивают область значений коэффициентов связности на совокупность интервалов $(-\infty, \gamma_0), (\gamma_0, \gamma_2), (\gamma_2, \infty)$. Для обозначенных интервалов и критических значений коэффициента связности могут быть построены характерные амплитудно-частотные характеристики (рис. 13).

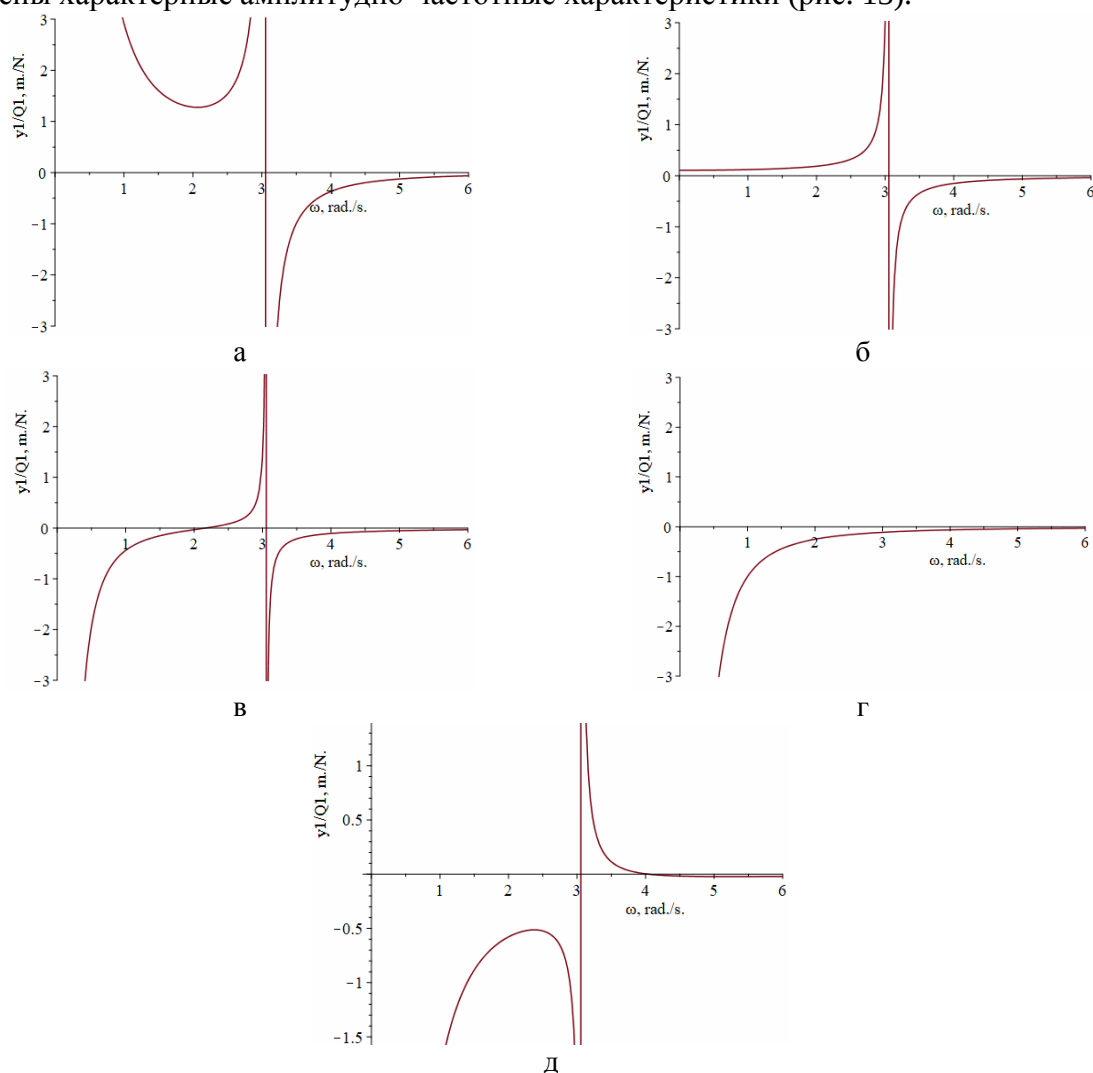


Рис. 13. Амплитудно-частотные характеристики, соответствующие интервалам и критическим значениям коэффициента связности: а – $(-\infty, \gamma_0)$, б – $\{\gamma_0\}$, в – (γ_0, γ_2) , г – $\{\gamma_2\}$, д – (γ_2, ∞)

Особенности амплитудно-частотных характеристик (рис. 13), нашедшие своё отражение в количестве резонансов, частот обнуления, а положительных и отрицательных ветвей, могут быть представлены с помощью динамических инвариантов (табл. 3).

Табл. 3. Характеристики динамических инвариантов диады $0 = \omega_1^2, 0 < \omega_2^2, 0 < \Delta_2^2$

	1	2	3	4	5
I	(∞, γ_0)	γ_0	(γ_0, γ_2)	$\gamma = \gamma_2$	(γ_2, ∞)
II	$S_0^2 F_1^1$	$S_0^1 F_1^1$	$S_1^2 F_2^1$	$S_0^1 F_1^0$	$S_1^2 F_2^1$
III	J_4	J_3	J_6	J_2	J_6

Обобщенные характеристики динамических инвариантов в зависимости от коэффициента связности могут быть представлены интегральной характеристикой (рис. 14).

Таким образом, диада, как специфическая форма проявления механической колебательной системы, определяется множеством из четырех динамических инвариантов $S_0^1 F_1^0, S_0^1 F_1^1, S_0^2 F_1^1, S_1^2 F_2^1$, среди которых может быть отмечен особенный динамический инвариант $S_0^1 F_1^0$ с одной отрицательной формой и одним резонансом. В свою очередь,

приложение к массоинерционному элементу m_2 диады дополнительной силы γQ_1 с учетом коэффициента связности расширяет многообразие динамических особенностей J_6 с помощью динамических инвариантов J_2 , J_3 и J_4 . Следует отметить, что инварианты с характеристиками J_2 , J_3 , J_4 исключают возможность реализации обнуления амплитуды колебания координаты y_1 . В свою очередь, динамический инвариант с характеристикой J_6 допускает режим обнуления амплитуды колебания координаты y_1 .

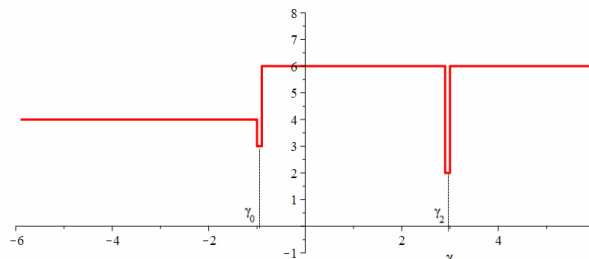


Рис. 14. График интегральной характеристики для диады: γ_0 , γ_2 – критические значения коэффициента связности

Рассмотрение вариантов механических колебательных систем с учетом структурных особенностей показывает, что приложение дополнительной силы к массоинерционному элементу изменяет многообразие динамических состояний.

IV. Отображение структурных особенностей механических колебательных систем с помощью динамических инвариантов в зависимости от коэффициента связности внешних силовых возмущений. Рассмотренные механические колебательные системы отображаются с помощью различных многообразий динамических инвариантов, что позволяет делать предположения о возможности изменения совокупности динамических особенностей с помощью изменения связности внешних силовых возмущений (табл. 7).

Специфика механической колебательной системы, выраженная в обнулении или неограниченном увеличении параметров, может быть отображена набором динамических инвариантов, по сути, передающих существенные особенности амплитудно-частотных характеристик передаточных функции системы.

Таким образом, при отсутствии дополнительной силы механические колебательные системы, обладающие структурной спецификой (табл. 1, столбец 2), могут быть отображены определенными множествами динамических инвариантов (столбец 4) с интегральными характеристиками (столбец 3). Приложение семейства дополнительных сил приводит к расширению многообразия динамических состояний с помощью «точечных» (столбец 5) и «интервальных» (столбец 6) характеристик. В частности, система с двумя степенями свободы, у которой массоинерционные элементы связаны между собою пружиной k_2 , находящаяся под действием одной силы, приложенной к массоинерционному элементу, обладает динамическим инвариантом с характеристикой $S_1^2 F_2^1$. Приложение дополнительной силы к массоинерционному элементу системы приводит к расширению динамического многообразия $S_1^2 F_2^1$ с помощью динамических инвариантов с «точечными» $S_0^1 F_1^1$, $S_0^1 F_1^0$ и «интервальными» $S_0^2 F_2^1$ характеристиками.

Наравне с изменениями, связанными с особенностями приложения сил к системе, могут быть рассмотрены изменения, связанные со структурной спецификой механической колебательной системой. В этом случае изменение структуры системы может быть интерпретировано с помощью изменения множества динамических инвариантов, характеризующего многообразие динамических состояний. В частности, присоединение диады, которая определяется множеством характеристик $S_0^1 F_1^0$, $S_0^1 F_1^1$, $S_0^2 F_2^1$, $S_1^2 F_2^1$ (строка IV), к опорным поверхностям формирует динамическую систему с характеристиками вида $S_0^1 F_1^1$, $S_0^2 F_2^1$, $S_1^2 F_2^1$, $S_1^2 F_2^2$ (строка I), что может быть интерпретировано как «добавление» динамических инвариантов с характеристиками $S_1^2 F_2^2$, $S_0^2 F_2^1$, «исключение» динамических инвариантов с характеристиками $S_0^1 F_1^0$, $S_0^2 F_2^1$; динамические инварианты $S_0^1 F_1^1$, $S_1^2 F_2^1$ остаются без изменений.

Табл. 7. Характеристики динамических инвариантов с учетом структурных особенностей

	1	2	3	4	5	6
$\frac{\bar{y}_1}{Q_1}(j\omega)$	Параметры системы	Расчетная схема	Интегральные характеристики динамических инвариантов	Множество характеристик для $\gamma=0$	Дополнительное множество «точечных» характеристик для $\gamma \neq 0$	Дополнительное множество «интервальных» характеристик для $\gamma \neq 0$
I	$m_1 > 0, k_j > 0$			$S_1^2 F_2^2$	$S_0^1 F_1^1, S_1^2 F_1^2$	$S_0^2 F_2^1$
II	$k_3 = 0$			$S_1^2 F_2^2$	$S_0^1 F_1^1, S_1^2 F_1^2$	$S_0^2 F_2^1$
III	$k_1 = 0$			$S_1^2 F_2^2$	$S_0^1 F_1^1, S_1^2 F_1^2$	$S_0^2 F_2^1$
IV	$k_1 = 0, k_3 = 0$			$S_1^2 F_2^1$	$S_0^1 F_1^1, S_0^1 F_1^0$	$S_1^2 F_2^1, S_0^2 F_1^1$

Таким образом, изменение механических колебательных систем может быть отражено в виде преобразования множества характеристик динамических инвариантов.

Заключение. В рамках методологии структурного математического моделирования рассмотрена задача оценки возможных совокупностей динамических особенностей для цепной механической колебательной системы, находящейся под воздействием силовых возмущений.

Разработана математическая модель, учитывающая связность внешних возмущений. В рамках единого методологического подхода рассмотрены варианты механических колебательных систем, учитывающие предельные значения параметров элементов системы и особенности приложения внешних силовых возмущений. Для отдельных вариантов механических колебательных систем на основе амплитудно-частотных характеристик и частотных функций обнуления рассчитаны множества динамических инвариантов. Показано, что изменение структурных особенностей механических колебательных систем может быть отражено в добавлении и исключении определенных динамических инвариантов.

Таким образом, для семейства механических колебательных систем с двумя степенями свободы разработан метод оценки многообразия состояний с помощью конечного набора динамических инвариантов.

Разработанный подход может быть обобщен на полный набор передаточных функций системы и передаточных функций межпарциальных связей механической колебательной системы.

Список литературы

1. Пановко Г.Я. Динамика вибрационных технологических процессов. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных технологий, 2006. – 176 с.
2. Eliseev S.V., Lukyanov A.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P. Dynamics of mechanical systems with additional ties. – Irkutsk: Publ. house of Irkutsk State University, 2006. – 316 p.
3. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection. – Switzerland: Springer International Publishing, 2016. – 708 p.
4. Елисеев С.В. Прикладной системный анализ и структурное математическое моделирование (динамика транспортных и технологических машин: связность движений, вибрационные взаимодействия, рычажные связи): монография. – Иркутск: ИрГУПС, 2018. – 692 с.

5. Елисеев С.В., Хоменко А.П. Динамическое гашение колебаний: концепция обратной связи и структурные методы математического моделирования. – Новосибирск: Наука, 2014. – 357 с.
6. Елисеев С.В., Елисеев А.В., Большаков Р.С., Хоменко А.П. Методология системного анализа в задачах оценки, формирования и управления динамическим состоянием технологических и транспортных машин. – Новосибирск: Наука, 2021. – 679 с.
7. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В. Системный анализ и математическое моделирование в мехатронике виброзащитных систем. – Иркутск: ИрГУПС, 2012. – 288 с.
8. Елисеев С.В. Структурная теория виброзащитных систем / С.В. Елисеев; отв. ред. А.Н. Панченков. – Новосибирск: Наука, 1978. – 212 с.
9. Лурье А.И. Операционное исчисление и применение в технических приложениях. – М.: Наука, 1959. – 368с.
10. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Московских А.О. Динамика машин. Системные представления, структурные схемы и связи элементов: монография. – М: Инновационное машиностроение, 2019. – 381 с.

References

1. Panovko G.Ya. Dynamics of vibrational technological processes. – M.-Izhevsk: SRC "Regularic and chaotic dynamics", Institute of Computer Technologies, 2006. – 176 p.
2. Eliseev S.V., Lukyanov A.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P. Dynamics of mechanical systems with additional ties. – Irkutsk: Publ. house of Irkutsk State University, 2006. – 316 p.
3. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection. – Switzerland: Springer International Publishing, 2016. – 708 p.
4. Eliseev S.V. Applied system analysis and structural mathematical modeling (dynamics of transport and technological machines: connectivity of movements, vibration interactions, lever connections): monograph. – Irkutsk: IrGUPS, 2018. – 692 p.
5. Eliseev S.V., Khomenko A.P. Dynamic damping of oscillations: feedback concept and structural methods of mathematical modeling. – Novosibirsk: Science, 2014. – 357 p.
6. Eliseev S.V., Eliseev A.V., Bolshakov R.S., Khomenko A.P. Methodology of system analysis in the tasks of assessment, formation and management of the dynamic state of technological and transport machines. – Novosibirsk: Science, 2021. – 679 p.
7. Khomenko A.P., Eliseev S.V., Ermoshenko Yu.V. System analysis and mathematical modeling in mechatronics of vibration protection systems. – Irkutsk: IrGUPS. 2012. – 288 p.
8. Eliseev S.V., Artyunin A.I. Applied theory of oscillations in the dynamics of linear mechanical systems. – Novosibirsk: Science, 2016. – 459 p.
9. Lurie A.I. Operational calculus and application in technical applications. – M.: Science, 1959. – 368 p.
10. Eliseev A.V., Kuznetsov N.K., Moskovskikh A.O. Dynamics of machines. System representations, structural schemes and connections of elements: monograph. – M.: Innovative Mechanical Engineering, 2019. – 381 p.

Сведения об авторах:

Information about authors:

Елисеев Андрей Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры математики ИрГУПС, доцент кафедры конструирования и стандартизации в машиностроении ИрННТУ	Eliseev Andrey Vladimirovich – candidate of technical sciences, associate professor of the Department of mathematics, associate professor of the Department of design and standardization in mechanical engineering
Кузнецов Николай Константинович – доктор технических наук, профессор кафедры конструирования и стандартизации в машиностроении	Kuznetsov Nikolai Konstantinovich – doctor of technical sciences, professor of the Department of design and standardization in mechanical engineering
Николаев Андрей Владимирович – соискатель	Nikolaev Andrey Vladimirovich – applicant
eavsh@ya.ru	

Получена 17.06.2022